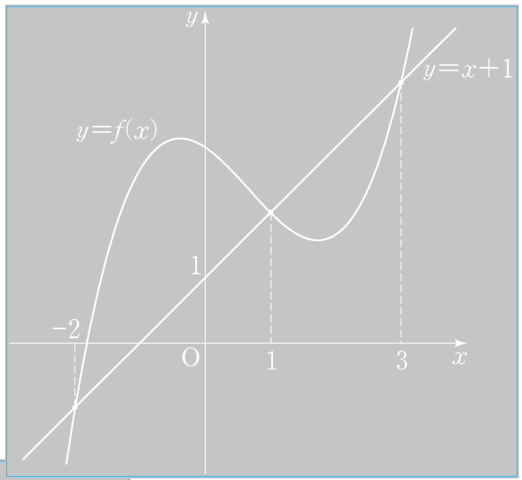
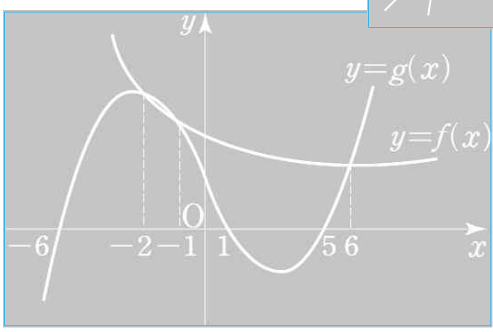
Chapter 2

부등식





2.1 삼차부등식과 사차부등식

① 간단한 삼차부등식과 사차부등식을 풀 수 있다.

2.2 분수부등식

① 분수부등식을 풀 수 있다.

② 분수부등식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

〈용어와 기호〉 삼차부등식, 사차부등식, 고차부등식, 분수부등식, 유리부등식

2.1 삼차부등식과 사차부등식

고차부등식의 뜻

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$

의 꼴로 나타내었을 때, $f(x)$가 삼차의 다항식이면 **삼차부등식**, 사차의 다항식이면 **사차부등식**이라고 한다.

또, $f(x)$가 삼차 이상인 부등식을 통틀어 **고차부등식**이라고 한다.

수학백서

함수의 그래프와 부등식의 해

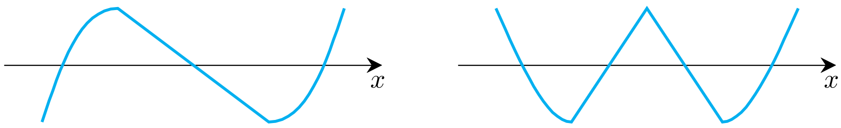
(1) $f(x) > 0$의 해는 $y = f(x)$의 그래프가 x축 위쪽에 있는 x의 범위이다.
(2) $f(x) < 0$의 해는 $y = f(x)$의 그래프가 x축 아래쪽에 있는 x의 범위이다.
(3) $f(x) = 0$의 해는 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 교점의 x좌표이다.

고차부등식의 풀이

① 주어진 부등식의 우변을 모두 좌변으로 이항한다.
② 최고차항의 계수를 양이 되도록 하여

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$

꼴로 변형한다.
③ 조립제법을 이용하여 인수분해한다.
④ 차수에 맞는 다항함수 $y = f(x)$의 그래프를 그린다.



$f(x)$가 삼차일 때　　　$f(x)$가 사차일 때

⑤ 그래프의 x절편을 경계로 $f(x)$의 부호에 알맞게 부등식의 해를 구한다.

EXAMPLE

21 다음 삼차부등식의 해를 구하시오.

(1) $3x^2 + 6x - 8 < x^3$

(2) $4 - x^2 \geq 4x - x^3$

SOLUTION

부호가 일정한 인수를 갖는 부등식

(1) 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)>0$일 때

① $f(x)g(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0$ $\quad$ $f(x)g(x)<0 \Leftrightarrow g(x)<0$

② $f(x)g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ $\quad$ $f(x)g(x)\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)\geq 0$일 때

① $f(x)g(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0$이고 $f(x)\neq 0$

$f(x)g(x)<0 \Leftrightarrow g(x)<0$이고 $f(x)\neq 0$

② $f(x)g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$이고 $f(x)=0$

$f(x)g(x)\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$이고 $f(x)=0$

수학백서

부호가 일정한 인수를 갖는 고차부등식

모든 실수 x에 대하여

(1) 항상 양인 인수는 바로 지운다.

(2) 항상 음이 아닌 인수는 지우고

① 부등식에 등호가 없으면 부등식의 해에서 그 인수가 0인 경우를 제외한다.

② 부등식에 등호가 있으면 부등식의 해에 그 인수가 0인 경우를 추가한다.

이때, 완전제곱식 또는 절댓값 기호가 있는 식은 항상 음이 아니다.

EXAMPLE **22** 다음 부등식의 해를 구하시오.

(1) $x^4-x^3+5x^2+x-6\geq 0$ $\quad$ (2) $2x^3+3x^2-x+2>0$

SOLUTION

EXAMPLE **23** 다음을 구하시오.

(1) $x^3+2x^2-4x-8<0$ $\quad$ (2) $x^4+2x^3-7x^2-20x-12<0$

SOLUTION

EXAMPLE

24 부등식 $|x^2-1|(x^2-3x-4)(x-2)^3 \ge 0$의 해의 집합을 S라 할 때, $S \subset \{x \mid x \ge a\}$를 만족하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

SOLUTION

부등식의 해가 주어질 때

다음 부등식

$$f(x)>0,\ f(x)<0,\ f(x)\ge 0,\ f(x)\le 0$$

의 해가 주어질 때 그 해의 경계는 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

EXAMPLE

25 부등식 $x^3+ax^2+bx+c>0$의 해가 $-5<x<1$ 또는 $x>5$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $3a-2b-c$의 값을 구하시오.

SOLUTION

연립부등식

연립된 모든 부등식의 해들의 공통범위가 연립부등식의 해이다.

EXAMPLE

26 두 집합 A, B가

$$A=\{x \mid x^3-21x+20 \ge 0\},\ B=\{x \mid x^3-8x^2+9x+18<0\}$$

일 때, $A \cap B$의 정수인 원소의 개수를 구하시오.

SOLUTION

EXAMPLE **27** 두 부등식 $x^3+9x^2+6x-16 \geq 0$, $x^2-(a-10)x-10a<0$을 모두 만족시키는 정수 x가 3개일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

SOLUTION

EXAMPLE **28** 두 집합 $A=\{x \mid 2x^3+5x^2+x-2>0\}$, $B=\{x \mid x^2+ax+b \leq 0\}$에 대하여 $A \cup B=\{x \mid x+2>0\}$, $A \cap B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x \leq 3\right\}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

SOLUTION

고차부등식의 활용

EXAMPLE **29** 세 모서리의 길이가 각각 $1\,\mathrm{cm}$, $2\,\mathrm{cm}$, $3\,\mathrm{cm}$인 직육면체가 있다. 각 모서리의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$만큼 늘려서 만든 직육면체의 부피가 처음 직육면체의 부피의 20배보다 작게 되도록 x의 값의 범위를 구하시오.

SOLUTION

2.2 분수부등식

분수부등식의 뜻

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$

의 꼴로 나타내었을 때, $f(x)$가 분수식이면 **분수부등식**이라 한다.

또, 일차부등식, 이차부등식, 고차부등식과 분수부등식을 통틀어 **유리부등식**이라 한다.

분수부등식의 풀이

(1) 주어진 분수부등식의 우변을 좌변으로 이항한다.

(2) 분자와 분모를 모두 인수분해하고 각 인수의 최고차항의 계수를 양수로 만들어 다음 분수부등식 꼴로 만든다.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

(3) 다음과 같이 분자와 분모의 곱인 다항부등식 꼴로 고친다.

두 실수 a와 b가

(1) 서로 같은 부호이면

$ab > 0,\ \frac{a}{b} > 0,\ \frac{b}{a} > 0$

(2) 서로 다른 부호이면

$ab < 0,\ \frac{a}{b} < 0,\ \frac{b}{a} < 0$

① $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Rightarrow f(x)g(x) > 0$이고 $g(x) \neq 0$

② $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Rightarrow f(x)g(x) < 0$이고 $g(x) \neq 0$

③ $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \geq 0$이고 $g(x) \neq 0$

④ $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \leq 0$이고 $g(x) \neq 0$

(4) 위에서 고친 부등식의 해를 구한다.

특히 등호가 있는 부등식의 해 중에서 분모가 0이 되는 무연근을 제외한다.

EXAMPLE

30 다음 분수부등식의 해를 구하시오.

(1) $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+1}$

(2) $\frac{4}{x+1} \geq 1 - \frac{2}{x-3}$

SOLUTION

부호가 일정한 인수를 갖는 분수부등식

(1) 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)>0$인 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 분자에 있을 때,

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)>0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)<0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$

② $f(x)$가 분모에 있을 때,

- $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)>0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)<0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)\geq 0$인 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 분자에 있을 때,

- $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)>0$이고 $f(x)\neq 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)<0$이고 $f(x)\neq 0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$이고 $f(x)=0$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$이고 $f(x)=0$

② $f(x)$가 분모에 있을 때,

- $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)>0$이고 $f(x)\neq 0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)<0$이고 $f(x)\neq 0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$이고 $f(x)\neq 0$
- $\dfrac{g(x)}{f(x)}\leq 0 \Leftrightarrow g(x)\leq 0$이고 $f(x)\neq 0$

항상 양인 인수가 있을 때

EXAMPLE **31** 다음 분수부등식의 해를 구하시오.

(1) $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+6x-16}\leq 0$ (2) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}\geq 0$

SOLUTION

분모가 항상 양일 때

EXAMPLE **32** 다음 분수부등식의 해를 구하시오.

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x+3}>1$$

SOLUTION

항상 음이 아닌 인수가 분자에 있을 때

EXAMPLE **33** 다음 분수부등식의 해를 구하시오.

(1) $\dfrac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)(x^2-4x+5)} \leq 0$

(2) $\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{x+1} > 1$

(3) $\dfrac{(x+2)^3(x-1)}{x+1} \leq 0$

SOLUTION

항상 음이 아닌 인수가 분모에 있을 때

EXAMPLE **34** 다음 분수부등식의 해를 구하시오.

(1) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} \leq 0$

(2) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+4)(x+2)^2} < 0$

SOLUTION

수학백서

부호가 일정한 인수를 갖는 분수부등식

모든 실수 x에 대하여

(1) 항상 양인 인수는 분자에 있든 분모에 있든 바로 지운다.

(2) 항상 음이 아닌 인수가 분자에 있을 때,

① 부등식에 등호가 없으면 부등식의 해에서 그 인수가 0인 경우를 제외한다.

② 부등식에 등호가 있으면 부등식의 해에 그 인수가 0인 경우를 추가한다.

(3) 항상 음이 아닌 인수가 분모에 있을 때, 등호가 있고 없음에 관계없이 그 인수가 0인 경우는 무연근이므로 무조건 제외한다.

이때, 완전제곱식 또는 절댓값 기호가 있는 식은 항상 음이 아니다.

절댓값 기호가 있는 인수가 있을 때

EXAMPLE **35** 다음을 구하시오.

(1) $\dfrac{|x+1|(x-3)}{x+6} \geq 0$　　(2) $\dfrac{(x+6)(x-9)}{|x+4|(x+1)^2} \leq 0$

SOLUTION

분수부등식의 해가 주어질 때

EXAMPLE **36** 부등식 $\dfrac{4}{x}-\dfrac{a}{x+1} \leq 0$의 해가 $-1 < x < 0$ 또는 $x \geq 2$가 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

SOLUTION

분수부등식 만들기

EXAMPLE **37** 다음 중 방정식 $[x]^2-4[x]+3=0$과 같은 해를 갖는 부등식은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leq 0$　② $\dfrac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x-2)} > 0$　③ $\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x-2)} < 0$

④ $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-4)} \geq 0$　⑤ $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+4)} > 0$

SOLUTION

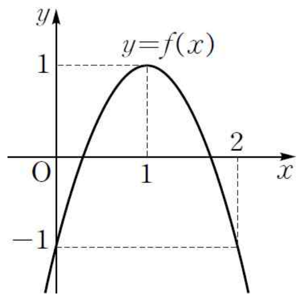
함수의 그래프를 이용한 분수부등식의 해 구하기

EXAMPLE

38 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식

$$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}\geq 0$$

의 해를 구하시오.



SOLUTION

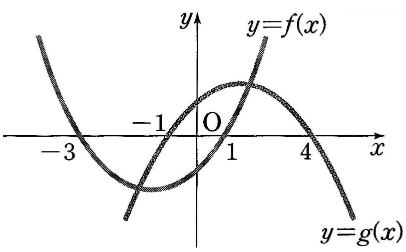
함수의 위치관계를 이용한 분수부등식의 해 구하기

EXAMPLE 2

39 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 분수부등식

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$$

을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

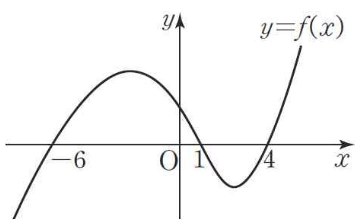


SOLUTION

그래프의 이동을 이용한 분수부등식의 해 구하기

EXAMPLE 2

40 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $\frac{f(x-2)}{f(x+2)}\leq 0$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.



SOLUTION

수학백서

그래프를 이용한 부등식의 해 구하기

(1) 그래프의 평행이동과 대칭이동

$y=f(x-m)$	$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동
$y=f(-x)$	$y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동
$y=f(m-x)$	$y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=\frac{m}{2}$에 대하여 대칭이동

(2) 부등식의 부호와 해

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에 대하여

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$	두 그래프가 모두 x축 위쪽에 있거나 모두 x축 아래쪽에 있는 x의 값의 범위
$\frac{f(x)}{g(x)}<0$	두 그래프 중 하나는 x축 위쪽에 있고 다른 하나는 x축 아래쪽에 있는 x의 값의 범위
$\frac{f(x)}{g(x)}=0$	방정식 $f(x)=0$의 해 중 $g(x)\neq 0$인 x의 값

분수부등식의 활용

EXAMPLE 2

41 경민이네 가족은 자동차를 타고 $100\,\text{km}$ 떨어진 외갓집을 일정한 속력으로 갔다. 외갓집에서 경민이네 집으로 돌아올 때에는 어두운 밤이라서 경민이네 집에서 외갓집으로 갈 때의 속력보다 시속 $20\,\text{km}$ 더 느렸고, 시간은 15분이 더 걸렸다. 이때, 경민이네 집에서 외갓집으로 갈 때의 자동차의 속력을 구하시오.

SOLUTION