SUPER MATH

정답 및 해설

Answers & Explanations

제곱근과 실수

특목고 대비 문제

P. 10~19

1 ㄴ, ㅅ **2** ⑤ **3** ㄱ, ㄴ **4** 400 **5** $-2xy$
6 10, 40, 90 **7** 108 **8** $x=5, y=1$ **9** 66
10 (1) $6.25\leq\frac{y}{x}<12.25$ (2) $(7, 57), (19, 59)$
11 4개 **12** 217 **13** $\frac{3}{2}$ **14** $\frac{1}{16}$ **15** 74
16 $\sqrt{2}$ **17** -1 **18** 1 **19** 33 **20** 30
21 $\sqrt{5}$ **22** 9개 **23** 2 **24** 5
25 $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$ **26** 풀이 참조 **27** 8
28 6 **29** 5 **30** $13-4\sqrt{5}$ **31** $3a$
32 $\frac{3(1+\sqrt{2})}{2}$ **33** 4 **34** 0 **35** $-\sqrt{2}$

1 ㄱ. [반례] 4는 유리수이지만 $\sqrt{4}=2$는 무리수가 아니다. (거짓)
ㄴ. $x+y$가 유리수라고 가정하면 (유리수)−(유리수)는 유리수이므로 $(x+y)-x=y$에서 y도 유리수가 되어 y가 무리수라는 가정에 모순이다.
따라서, x가 유리수, y가 무리수이면 $x+y$는 무리수이다. (참)
ㄷ. [반례] 0은 유리수, $\sqrt{2}$는 무리수이지만 $0\times\sqrt{2}=0$은 무리수가 아니다. (거짓)
ㄹ. [반례] $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$는 모두 무리수이지만 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$은 무리수가 아니다. (거짓)
ㅁ. [반례] $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$는 모두 무리수이지만 $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$는 무리수가 아니다. (거짓)
ㅂ. [반례] $x=\sqrt{2}+1$일 때, $(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$로 x^2은 유리수가 아니다. (거짓)
ㅅ. $xy=1$에서 $x\neq0$이므로 $y=\frac{1}{x}$
$x=a+\sqrt{b}$ (a는 유리수, $\sqrt{b}$는 무리수)로 놓으면
$$y=\frac{1}{a+\sqrt{b}}=\frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$$
따라서, x가 무리수이면 $xy=1$을 만족하는 y는 무리수이다. (참)
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㅅ이다.

2 $\sqrt{a^2}=|a|$이므로

① $|a|\geq a$에서
(ⅰ) $a\geq0$일 때, $|a|=a$
(ⅱ) $a<0$일 때, $|a|=-a(>0)$
$\therefore |a|>a$ ($\because$ $|a|$는 양수, a는 음수)
(ⅰ), (ⅱ)에서 $|a|\geq a$
② $|a|^2=a^2$에서
(ⅰ) $a\geq0$일 때, $|a|=a$
$\therefore |a|^2=a^2$
(ⅱ) $a<0$일 때, $|a|=-a$
$\therefore |a|^2=|a||a|=(-a)(-a)=a^2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $|a|^2=a^2$
③ $|-a|=|a|$에서
(ⅰ) $a\geq0$일 때, $-a\leq0$이므로
$|-a|=-(-a)=a$, $|a|=a$
$\therefore |-a|=|a|$
(ⅱ) $a<0$일 때, $-a>0$이므로
$|-a|=-a$, $|a|=-a$ $\therefore |-a|=|a|$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $|-a|=|a|$
④ $|ab|=|a||b|$에서
(ⅰ) $a\geq0$, $b\geq0$일 때,
$|a|=a$, $|b|=b$이고 $ab\geq0$이므로 $|ab|=ab$
$\therefore |ab|=ab=a\cdot b=|a||b|$
(ⅱ) $a\geq0$, $b<0$일 때,
$|a|=a$, $|b|=-b$이고, $ab\leq0$이므로
$|ab|=-ab$
$\therefore |ab|=-ab=a\cdot(-b)=|a||b|$
(ⅲ) $a<0$, $b\geq0$일 때,
$|a|=-a$, $|b|=b$이고, $ab\leq0$이므로
$|ab|=-ab$
$\therefore |ab|=-ab=(-a)\cdot b=|a||b|$
(ⅳ) $a<0$, $b<0$일 때,
$|a|=-a$, $|b|=-b$이고, $ab>0$이므로
$|ab|=ab$
$\therefore |ab|=ab=(-a)\cdot(-b)=|a||b|$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 $|ab|=|a||b|$
⑤ $|a+b|\geq|a|+|b|$에서 양변 모두 0이상이므로 양변을 제곱하여 부등호가 성립하는지 알아보면
(좌변)$^2=|a+b|^2$은 ②에 의하여
$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ …… ㉠
(우변)$^2=(|a|+|b|)^2$은 ②에 의하여
$(|a|+|b|)^2=a^2+2|a||b|+b^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$$\begin{aligned}|a+b|^2-(|a|+|b|)^2&=2(ab-|a||b|)\\&=2(ab-|ab|)\ (\because ④)\\&\leq0\ (\because ①)\end{aligned}$$
$\therefore |a+b|^2-(|a|+|b|)^2\leq0$

$\therefore |a+b| \leqq |a|+|b|$

따라서, 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3 ㄱ. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$(a는 유리수)라 하자.

양변을 제곱하면 $x+y+2\sqrt{xy}=a^2$

$\therefore \sqrt{xy}=\dfrac{a^2-(x+y)}{2}$ …… ㉠

$\sqrt{xy}$는 무리수이므로 ㉠의 좌변은 무리수이고 우변은 유리수이어서 모순이다.

따라서, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$는 무리수이다.

ㄴ. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\sqrt{\dfrac{xy}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{xy}}{x}$이므로 무리수이다.

ㄷ. [반례] $x=2$, $y=1$이면 $\sqrt{xy}=\sqrt{2}$는 무리수이지만 $\sqrt{x^2y}=\sqrt{4}=2$는 유리수이다.

따라서, 항상 무리수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4 $A=\sqrt{\dfrac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^4+(2^2)^{11}}}=\sqrt{\dfrac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}$

$=\sqrt{\dfrac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(2^{10}+1)}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

$\therefore (A+4)^2=(16+4)^2=20^2=\mathbf{400}$

5 $xy<0$이므로 x와 y는 서로 다른 부호이고,

$\dfrac{y}{z}>0$이므로 y와 z는 서로 같은 부호이다.

따라서, x와 z는 서로 다른 부호, 즉 $xz<0$

$xy<0$이고 $yz>0$이므로 $xy-yz<0$

$yz>0$이고 $xz<0$이므로 $yz-xz>0$

$\therefore |xy-yz|-\sqrt{(yz-xz)^2}+|xy|+\sqrt{(xz)^2}$

$=-(xy-yz)-(yz-xz)-xy-xz$

$=-xy+yz-yz+xz-xy-xz$

$=\mathbf{-2xy}$

6 $\sqrt{360x}=\sqrt{2^2\times3^2\times2\times5\times x}$이므로 $\sqrt{360x}$가 정수가 되기 위해서는 $x=10t^2$(t는 자연수) 꼴이어야 한다.

(i) $t=1$이면 $x=10$ $\therefore \sqrt{360x}=60$

(ii) $t=2$이면 $x=40$ $\therefore \sqrt{360x}=120$

(iii) $t=3$이면 $x=90$ $\therefore \sqrt{360x}=180$

(i)~(iii)에서 두 자리 자연수 x는 **10, 40, 90**이다.

7 $\sqrt{3x}$가 자연수이므로 $x=3k^2$(k는 자연수)라 하면

(i) $3k^2\leqq100$, $k^2\leqq\dfrac{100}{3}=33.333\cdots$

따라서, $k=5$일 때 최대이고 $x=3\times5^2=75$

(ii) $3k^2\geqq100$, $k^2\geqq\dfrac{100}{3}=33.333\cdots$

따라서, $k=6$일 때 최소이고 $x=3\times6^2=108$

(i)~(ii)에서 100에 가장 가까운 정수 x는 **108**이다.

8 $\sqrt{980xy}=\sqrt{2^2\times7^2\times5xy}$이므로 $\sqrt{980xy}$가 자연수가 되려면 $5xy$가 제곱수가 되어야 한다.

그런데 최소의 자연수를 구해야 하므로 $xy=5$이고, $x\geqq y$이므로 $\boldsymbol{x=5}$, $\boldsymbol{y=1}$

9 $0.\dot{0}\dot{3}=\dfrac{3}{99}=\dfrac{1}{33}$이므로

$\sqrt{\dfrac{2x}{0.\dot{0}\dot{3}}}=\sqrt{33\times2x}=\sqrt{2\times3\times11\times x}$

x가 두 자리 자연수이고 $2\times3\times11\times x$가 가장 작은 제곱수가 되려면

$x=2\times3\times11=\mathbf{66}$

10 (1) $2.5\leqq\sqrt{\dfrac{y}{x}}<3.5$이므로 각 변을 제곱하면

$\boldsymbol{6.25\leqq\dfrac{y}{x}<12.25}$ …… ㉠

(2) ㉠에서 $\dfrac{y}{x}>1$이므로 $y>x$

$\therefore x-y=-50$, $y=x+50$

㉠에 $y=x+50$을 대입하면

$6.25\leqq\dfrac{x+50}{x}<12.25$, $6.25\leqq1+\dfrac{50}{x}<12.25$

$5.25\leqq\dfrac{50}{x}<11.25$, $\dfrac{1}{11.25}<\dfrac{x}{50}\leqq\dfrac{1}{5.25}$

$\dfrac{50}{11.25}<x\leqq\dfrac{50}{5.25}$, $4.444\cdots<x\leqq9.523\cdots$

$\therefore x=5, 6, 7, 8, 9$, $y=55, 56, 57, 58, 59$

그런데 x, y는 서로소이므로 순서쌍 (x, y)는

(7, 57), **(9, 59)**이다.

11 $\sqrt{500}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$이므로 $\sqrt{y}=\sqrt{500}-\sqrt{x}=10\sqrt{5}-\sqrt{x}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $y=500-20\sqrt{5x}+x$

y가 정수이려면 $\sqrt{5x}$는 근호를 벗어야 한다.

즉, $5x$는 제곱수이어야 한다.

$x=5t^2$ (t는 자연수)라 하면

(i) $t=1$이면 $x=5$, $y=405$

(ii) $t=2$이면 $x=20$, $y=320$

(iii) $t=3$이면 $x=45$, $y=245$

(iv) $t=4$이면 $x=80$, $y=180$

(v) $t=5$이면 $x=125$, $y=125$

그런데 $x<y$이므로 (i)~(iv)에서 순서쌍 (x, y)는

$(5, 405)$, $(20, 320)$, $(45, 245)$, $(80, 180)$의 **4**개이다.

다른풀이

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}=5\sqrt{5}+5\sqrt{5}$이고 $0<x<y$이므로

$0<\sqrt{x}<5\sqrt{5}$

$0<x<125$, $0<5t^2<125$, $0<t^2<25$ $\quad\therefore 0<t<5$

t는 자연수이므로 $t=1, 2, 3, 4$

따라서, 순서쌍 (x, y)의 개수는 **4개**이다.

12 $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$이므로 $f(1)=f(2)=f(3)=1$

$2<\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<3$이므로

$f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=2$

$3<\sqrt{10}<\sqrt{11}<\cdots<\sqrt{15}<4$이므로

$f(9)=f(10)=f(11)=\cdots=f(15)=3$

위와 같은 식으로 계산하면

$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$,

$f(25)=f(26)=\cdots=f(35)=5$,

$f(36)=f(37)=\cdots=f(48)=6$,

$f(49)=f(50)=7$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+7\times2$

$=3+10+21+36+55+78+14$

$=\mathbf{217}$

13 (주어진 식)$=25x+10\sqrt{5}x-15\sqrt{5}y+50y$

$=25(x+2y)+5\sqrt{5}(2x-3y)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 유리수가 되려면 $2x-3y=0$이 되어야 한다.

$2x=3y$ $\quad\therefore \dfrac{x}{y}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

14 $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$에서 $x+y=2\sqrt{xy}$

그런데 $x+y=\sqrt{2xy}$이므로

$\sqrt{2xy}=2\sqrt{xy}$ $\quad\therefore xy=2$

$\therefore \dfrac{\sqrt{xy}}{(x+y)^3}=\dfrac{\sqrt{xy}}{(2\sqrt{xy})^3}=\dfrac{1}{8xy}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

15 (좌변)$=\sqrt{\dfrac{11}{9}\times\dfrac{b}{a}}$

(우변)$=\dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{5}{9}$

(좌변)^2=(우변)^{2}이므로 $\dfrac{11}{9}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{25}{81}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{25}{81}\times\dfrac{9}{11}=\dfrac{25}{99}$

a, b는 서로소이므로 $a=99$, $b=25$

$\therefore a-b=\mathbf{74}$

16 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $1-x>0$

$$\text{(주어진 식)}=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{2}}$$

17 $A=\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}-\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}-1}}\right)^2$

$=\dfrac{\sqrt{10}+3+\sqrt{10}-3-2\sqrt{10-9}}{\sqrt{10}-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{10}-1)}{\sqrt{10}-1}=2$

$\therefore \dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}-\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}-1}}=\sqrt{2}$

$(\because \sqrt{\sqrt{10}+3}>\sqrt{\sqrt{10}-3}$, $\sqrt{\sqrt{10}-1}>0$

$B=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$

$\therefore A-B=\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)=\mathbf{-1}$

18 $1<\sqrt{3}<2$에서 $-2<-\sqrt{3}<-1$, $0<2-\sqrt{3}<1$이므로

$0<(2-\sqrt{3})^{2006}<1$ $\quad\therefore x=(2-\sqrt{3})^{2006}$

$\therefore xy=(2-\sqrt{3})^{2006}(2+\sqrt{3})^{2006}$

$=\{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}^{2006}$

$=\mathbf{1}$

19 부등식 $2<\sqrt{3(x-4)}\leqq5$의 각 변이 모두 양수이므로

제곱하면 $4<3(x-4)\leqq25$, $\dfrac{4}{3}<x-4\leqq\dfrac{25}{3}$

$\therefore \dfrac{16}{3}<x\leqq\dfrac{37}{3}$

$32<6x\leqq74$, $-5<6x-37\leqq37$

$\therefore -5<A\leqq37$

따라서, A의 최대값은 37, 최소값은 -4이므로

$37+(-4)=\mathbf{33}$

20 $2<\sqrt{|x-2|}<4$의 각 변을 제곱하면

$4<|x-2|<16$

(i) $x\geqq2$일 때, $4<x-2<16$ $\quad\therefore 6<x<18$

(ii) $x<2$일 때, $4<2-x<16$, $2<-x<14$

$\therefore -14<x<-2$

(i), (ii)에서 $a=17$, $b=-13$이므로
$a-b=17-(-13)=\mathbf{30}$

21 $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}\right)^2$

$=\dfrac{(\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3})^2}{(\sqrt{\sqrt{10}+1})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{10}+3)+(\sqrt{10}-3)+2\sqrt{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}}{\sqrt{10}+1}$

$=\dfrac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1}=\dfrac{2(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}+1}=2$

$\sqrt{\sqrt{10}+3}>0$, $\sqrt{\sqrt{10}-3}>0$, $\sqrt{\sqrt{10}+1}>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-1}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}=\sqrt{2}$

$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{2}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

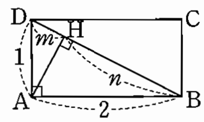
22 $\sqrt{x^2+4y}$의 정수 부분이 5이므로 $5\leqq\sqrt{x^2+4y}<6$
각 변을 제곱하면 $25\leqq x^2+4y<36$
$y=1$이면 $21\leqq x^2<32$에서 $x=5$
$y=2$이면 $17\leqq x^2<28$에서 $x=5$
$y=3$이면 $13\leqq x^2<24$에서 $x=4$
$y=4$이면 $9\leqq x^2<20$에서 $x=3, 4$
$y=5$이면 $5\leqq x^2<16$에서 $x=3$
$y=6$이면 $1\leqq x^2<12$에서 $x=1, 2, 3$
따라서, 순서쌍 (x, y)는 $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$
$(4, 4)$, $(3, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$의 **9**개이다.

23 $\sqrt{3x-2}$의 정수 부분이 9이므로 $9\leqq\sqrt{3x-2}<10$
각 변을 제곱하면 $81\leqq 3x-2<100$
$83\leqq 3x<102$ $\quad\therefore 27.666\cdots\leqq x<34$
$\therefore M=33$, $m=28$
$\therefore \sqrt{M-m}=\sqrt{33-28}=\sqrt{5}$
$2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{M-m}$의 정수 부분은 **2**이다.

24 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$에서
$1<\sqrt{2}<2$이므로 $2<\sqrt{2}+1<3$
$\therefore a=(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1$
$\therefore a^2+2a+4=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)+4$
$=3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2+4$
$=\mathbf{5}$

다른 풀이
$a=\sqrt{2}-1$에서 $a+1=\sqrt{2}$ ……㉠
㉠의 양변을 제곱하면
$a^2+2a+1=2$ $\quad\therefore a^2+2a=1$
$\therefore a^2+2a+4=1+4=\mathbf{5}$

25 오른쪽 그림의 꼭지점 A에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{DH}}=m$, $\overline{\mathrm{BH}}=n$이라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{DH}}\cdot\overline{\mathrm{DB}}$이므로



$1=m(m+n)$ ……㉠
$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BH}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $4=n(m+n)$ ……㉡
㉠÷㉡에서 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{m}{n}$ $\quad\therefore n=4m$ ……㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $1=m(m+4m)$
$5m^2=1$, $m^2=\dfrac{1}{5}$ $\quad\therefore m=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $n=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=m+n=\sqrt{5}$ $\quad\therefore x=3+\sqrt{5}$
$2<\sqrt{5}<3$이므로 $5<3+\sqrt{5}<6$
$\therefore a=5$, $b=(3+\sqrt{5})-5=\sqrt{5}-2$
$\therefore \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{5-(\sqrt{5}-2)}{5+(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{(7-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$
$=\dfrac{26-10\sqrt{5}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{13-5\sqrt{5}}{2}}$

26 $y\neq0$이면 $\sqrt{3}=-\dfrac{x}{y}$ ……㉠
㉠의 좌변 $\sqrt{3}$은 무리수이고, 우변 $-\dfrac{x}{y}$는 유리수이므로 모순이다.
따라서, $y=0$이고 $x+0\cdot\sqrt{3}=0$에서 $x=0$
$\therefore x=y=0$

27 $7^2<57<8^2$이므로 $7<\sqrt{57}<8$
$\sqrt{57}$의 정수 부분이 7이므로 소수 부분 x는
$x=\sqrt{57}-7$
$\therefore x(x+14)=(\sqrt{57}-7)(\sqrt{57}+7)=57-49=\mathbf{8}$

28 $2005^2<2005^2+1<2006^2$
$2005<\sqrt{2005^2+1}<2006$
$\therefore x=\sqrt{2005^2+1}-2005$
$\therefore (x+2005)^2=(\sqrt{2005^2+1}-2005+2005)^2$
$=2005^2+1$
따라서, $(x+2005)^2$의 일의 자리 수는 **6**이다.

29 (i) $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$

위의 식에서 $\sim\!\sim$ 부분이 x이므로

$x^2=2+x,\ x^2-x=2 \qquad \therefore a=2$

(ii) $y=\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-\cdots}}}$의 양변을 제곱하면

$y^2=3-\sqrt{3-\sqrt{3-\cdots}}$

위의 식에서 $\sim\!\sim$ 부분이 y이므로

$y^2=3-y,\ y^2+y=3 \qquad \therefore b=3$

(i), (ii)에서 $a+b=\mathbf{5}$

30 $\dfrac{4x-y}{3x-2y}=2$에서 $4x-y=2(3x-2y)$

$2x=3y \qquad \therefore y=\dfrac{2}{3}x$

$\therefore \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{x+\frac{2}{3}x}{x-\frac{2}{3}x}=\dfrac{\frac{5}{3}x}{\frac{1}{3}x}=5$

따라서, $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\sqrt{5}$이고 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$의 정수 부분 $a=2$, 소수 부분 $b=\sqrt{5}-2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(\sqrt{5}-2)^2$

$=\mathbf{13-4\sqrt{5}}$

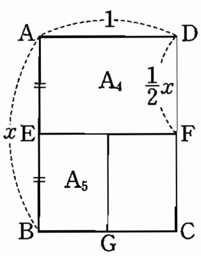
31 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $a=\sqrt{5}-2 \qquad \therefore \sqrt{5}=a+2$

또한, $6^2<45<7^2$이므로 $6<\sqrt{45}<7$

$\therefore$ ($\sqrt{45}$의 소수 부분)$=\sqrt{45}-6=3\sqrt{5}-6$

$=3(a+2)-6=\mathbf{3a}$

32 □ABCD와 □DAEF는 서로 닮음인 도형이므로 $\overline{AB}=x$, $\overline{DF}=\dfrac{1}{2}x$라 하면



$1:x=\dfrac{1}{2}x:1$

$\dfrac{1}{2}x^2=1,\ x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$

$\therefore$ (A3, A5 용지의 가로, 세로의 길이의 합)

$=(1+\sqrt{2})+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

$=\mathbf{\dfrac{3(1+\sqrt{2})}{2}}$

33 $A\cap B$의 원소를 x라 하면 x는 B의 원소도 되므로

$3\le\sqrt{nx}<4,\ 9\le nx<16$

또한, x는 A의 원소도 되므로 nx는 자연수이다.

따라서, $nx=9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$이므로

$A\cap B=\left\{\dfrac{9}{n}, \dfrac{10}{n}, \dfrac{11}{n}, \dfrac{12}{n}, \dfrac{13}{n}, \dfrac{14}{n}, \dfrac{15}{n}\right\}$

그런데 $A\cap B$의 원소의 합이 20이므로

$\dfrac{9}{n}+\dfrac{10}{n}+\dfrac{11}{n}+\cdots+\dfrac{15}{n}=21$

$\dfrac{84}{n}=21 \qquad \therefore n=\mathbf{4}$

34 (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cdots}}}=a$에서 $\sim\!\sim$ 부분이 a이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+a}=a,\ a(\sqrt{2}+a)=1$

$\therefore a^2+\sqrt{2}a=1$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\cdots}}}=b$에서 $\sim\!\sim$ 부분이 b이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-b}=b,\ b(\sqrt{3}-b)=1$

$\therefore b^2-\sqrt{3}b=-1$

(i), (ii)에 의하여

$a^2+\sqrt{2}a+b^2-\sqrt{3}b=1+(-1)=\mathbf{0}$

35 $\sqrt{11+\sqrt{72}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $4<3+\sqrt{2}<5$이므로 $a=4$

$\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$에서 $-2<-\sqrt{2}<-1$, $1<3-\sqrt{2}<2$이므로

$b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{1}{a-2+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(2-\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2}$

$=\mathbf{-\sqrt{2}}$

참고

이중근호의 풀이

① $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

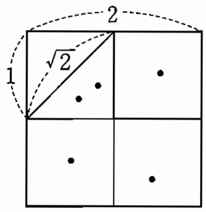
② $a>b>0$일 때, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

P. 20~21

특목고 구술·면접 대비 문제

1 풀이 참조 **2** 화요일 **3** 풀이 참조 **4** 풀이 참조

1 한 변의 길이가 2인 정사각형을 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 4개의 정사각형으로 나누면 그 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$가 된다. 그런데 큰 정사각형 내부에 임의로 5개의 점을 찍으면 4개의 작은 정사각형 중 어느 한 정사각형 내부에는 반드시 두 점이 찍히게 되고, 그 두 점 사이의 거리는 반드시 $\sqrt{2}$보다 작다.



2 일주일은 7일로 주기적으로 변한다.
따라서, $\langle\sqrt{2020}\rangle^{\langle\sqrt{2020}\rangle}$을 7로 나눈 나머지를 구하면 요일을 구할 수 있다.
$44^2=1936$, $45^2=2025$이므로 $\langle\sqrt{2020}\rangle=45$
$44<\sqrt{2020}<45$
$45=6\times7+3$이므로 45를 7로 나눈 나머지는 3이다.
$45^2=(6\times7+3)^2$이므로 45^2을 7로 나눈 나머지는 3^2을 7로 나눈 나머지와 같아서 2이다.
$45^3=(6\times7+3)^3$이므로 45^3을 7로 나눈 나머지는 3^3을 7로 나눈 나머지와 같아서 6이다.
이와 같은 방법으로 45^{45}을 7로 나눈 나머지는 3^{45}을 7로 나눈 나머지와 같다.
3을 7로 나눈 나머지는 3, 3^2을 7로 나눈 나머지는 2,
3^3을 7로 나눈 나머지는 6, 3^4을 7로 나눈 나머지는 4,
3^5을 7로 나눈 나머지는 5, 3^6을 7로 나눈 나머지는 1,
3^7을 7로 나눈 나머지는 3으로 계속 반복되어 $3^{45}=3^{6\times7+3}$을 7로 나눈 나머지는 6이다.
따라서, 구하는 요일은 **화요일**이다.

3 $\sqrt{5}-\sqrt{3}=x$(x는 0 아닌 유리수)라 가정하면
$\sqrt{5}=x+\sqrt{3}$ …… ㉠
㉠의 양변을 제곱하면
$5=x^2+2\sqrt{3}x+3$, $2\sqrt{3}x=2-x^2$
$\therefore \sqrt{3}=\dfrac{2-x^2}{2x}$ …… ㉡
그런데 ㉡의 좌변은 유리수가 아니고 우변은 유리수이므로 모순이다.
따라서, $\sqrt{5}-\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

4 $\dfrac{n+3}{n+1}=\dfrac{(n+1)+2}{n+1}=1+\dfrac{2}{n+1}\leq2$이므로

(ⅰ) $n=1$일 때, $n<\sqrt{3}<\dfrac{n+3}{n+1}$과

(ⅱ) $n\geq2$일 때, $\dfrac{n+3}{n+1}<\sqrt{3}<n$임을 증명하면 된다.

(ⅰ)에서 $\sqrt{3}-n>0$, $\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}>0$과

(ⅱ)에서 $\sqrt{3}-n<0$, $\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}<0$임을 증명하면

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sqrt{3}-n$과 $\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}$의 부호가 서로 같으므로 $\dfrac{\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-n}>0$임을 보이면 된다.

$$\frac{\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-n}=\frac{(n+3)-\sqrt{3}(n+1)}{(n+1)(\sqrt{3}-n)}$$
$$=\frac{n-\sqrt{3}n+3-\sqrt{3}}{(n+1)(\sqrt{3}-n)}$$
$$=\frac{n(1-\sqrt{3})-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{(n+1)(\sqrt{3}-n)}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{3})(n-\sqrt{3})}{-(n+1)(n-\sqrt{3})}$$
$$=-\frac{1-\sqrt{3}}{n+1}\ (\because n\text{은 자연수이므로 } n\neq\sqrt{3})$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{n+1}>0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

그리고

$$1-\frac{\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-n}=1-\frac{\sqrt{3}-1}{n+1}$$
$$=\frac{n+2-\sqrt{3}}{n+1}>0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $0<\dfrac{\dfrac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-n}<1$이므로

$$\left|\frac{n+3}{n+1}-\sqrt{3}\right|<|\sqrt{3}-n|$$

따라서, $\sqrt{3}$은 $\dfrac{n+3}{n+1}$에 **더 가깝다.**

시·도 경시 대비 문제

1 0 **2** 6 **3** 0 **4** 6 **5** $1-b$

6 $17-12\sqrt{2}$ **7** 198 **8** 5

9 최대값 $\frac{1}{6}$, $a=3$ **10** 6

11 333⋯333(3이 n개) **12** 121

1 $1<\sqrt{3}<2$에서 $3<2+\sqrt{3}<4$이므로

$[a]=[2+\sqrt{3}]=3$

$$\frac{a-[a]}{[a]}=\frac{(2+\sqrt{3})-3}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

$$\frac{[a]}{a-[a]+1}=\frac{3}{(2+\sqrt{3})-3+1}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{a-[a]}{[a]}+\frac{[a]}{a-[a]+1}-\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

그런데 $1<\sqrt{3}<2$에서 $0<\sqrt{3}-1<1$

$$\therefore 0<\frac{\sqrt{3}-1}{3}<\frac{1}{3}$$

$$\therefore \left[\frac{a-[a]}{[a]}+\frac{[a]}{a-[a]+1}-\sqrt{3}\right]=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right]=\mathbf{0}$$

2 $\{x\}=2$이므로 $2\leq\sqrt{x}<3$

$「x」=\sqrt{x}-2$이므로 $0.3<\sqrt{x}-2<0.5$

$2.3<\sqrt{x}<2.5$ $\therefore 5.29<x<6.25$

따라서, 구하는 자연수 x의 값은 **6**이다.

3 $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}=\sqrt{c+a}$의 양변을 제곱하면

$(a+b)+(b+c)+2\sqrt{(a+b)(b+c)}=c+a$

$2\sqrt{(a+b)(b+c)}=-2b$

$\therefore \sqrt{(a+b)(b+c)}=-b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$ab+ac+b^2+bc=b^2$

$ab+bc+ca=0$ ⋯⋯ ㉡

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\mathbf{0}$ ($\because$ ㉡)

4 $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3}=2\sqrt{3}-3$$

$\fallingdotseq 2\times1.7-3=0.4$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}=\frac{-\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{4-3}=-2\sqrt{3}-3$$

$\fallingdotseq -2\times1.7-3=-6.4$

$\therefore$ (주어진 식)$=\{0.4\}-\{-6.4\}$

$=0-(-6)$

$=\mathbf{6}$

5 $0<x-\sqrt{3}y<1$에서 $0<(x-\sqrt{3}y)^3<1$이므로

$(x-\sqrt{3}y)^3$의 정수 부분은 0

$(x-\sqrt{3}y)^3$의 소수 부분을 a라 하면

$a=(x-\sqrt{3}y)^3-0=(x-\sqrt{3}y)^3$

또, $(x+\sqrt{3}y)^3$의 정수 부분을 c, 소수 부분을 b라 하면

$(x+\sqrt{3}y)^3=c+b$

$(x-\sqrt{3}y)^3+(x+\sqrt{3}y)^3=a+c+b$

위의 식을 전개하면

$x^3-3\sqrt{3}x^2y+9xy^2-3\sqrt{3}y^3+x^3+3\sqrt{3}x^2y+9xy^2$

$+3\sqrt{3}y^3=2(x^3+9xy^2)=a+c+b$

$\therefore a+b=2(x^3+9xy^2)-c$

x, y, c는 자연수이므로 $2(x^3+9xy^2)$은 정수이고, $a+b$도 정수이다.

$0<a<1$, $0\leq b<1$이므로 $0<a+b<2$

$\therefore a+b=1$ ($\because$ $a+b$는 정수)

$\therefore (x-\sqrt{3}y)^3=a=\mathbf{1-b}$

참고

Ⅱ단원 식의 계산에서 학습할 곱셈 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

6 $y^{x^2}\div y^{2\sqrt{3}x-5}=y^{x^2-(2\sqrt{3}x-5)}$

$=y^{x^2-2\sqrt{3}x+5}$ ⋯⋯ ㉠

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$에서 $x-\sqrt{3}=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $x^2-2\sqrt{3}x+3=2$

$\therefore x^2-2\sqrt{3}x+5=4$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

(주어진 식)$=y^4=(\sqrt{2}-1)^4=\{(\sqrt{2}-1)^2\}^2$

$=(2-2\sqrt{2}+1)^2=(3-2\sqrt{2})^2$

$=9-12\sqrt{2}+8=\mathbf{17-12\sqrt{2}}$

다른 풀이

$y^{x^2}\div y^{2\sqrt{3}x-5}=y^{x^2-(2\sqrt{3}x-5)}$에서 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$이므로

$x^2-2\sqrt{3}x+5=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+5$

$=3+2\sqrt{6}+2-6-2\sqrt{6}+5$

$=4$

$\therefore$ (주어진 식)$=y^4=(\sqrt{2}-1)^4=(3-2\sqrt{2})^2$

$=9-12\sqrt{2}+8=\mathbf{17-12\sqrt{2}}$

7 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$에

$n=1, 2, 3, \cdots, 9999, 10000$을 차례로 대입하면

$2(\sqrt{2}-1)<1<2(1-0)$

$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$

$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\vdots$

$2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})<\dfrac{1}{\sqrt{9999}}<2(\sqrt{9999}-\sqrt{9998})$

$2(\sqrt{10001}-\sqrt{10000})<\dfrac{1}{\sqrt{10000}}<2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999})$

위의 부등식들을 변변끼리 더하면

$2(\sqrt{10001}-1)<A<2(\sqrt{10000}-0)$

$\therefore 198<A<200$

그런데 $n=1$일 때는 $2(\sqrt{2}-1)<1\leqq 1$이므로

$198<A<199$

따라서, A의 정수 부분은 **198**이다.

8 (i) $x\geqq 1$일 때,

$(x-1)+(x+2)=2x+1<5$

$x<2$이므로 $1\leqq x<2$

(ii) $-2\leqq x<1$일 때,

$-(x-1)+(x+2)=3<5$

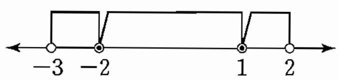
$\therefore -2\leqq x<1$

(iii) $x<-2$일 때,

$-(x-1)-(x+2)=-2x-1<5$

$x>-3$이므로 $-3<x<-2$

(i)~(iii)에서



$\therefore -3<x<2$

따라서, $a=1$, $b=-2$이므로 $a^2+b^2=\mathbf{5}$

9 $a^2+9>0$이므로 $\dfrac{a}{a^2+9}$가 최대값을 가지려면 $a>0$이어야 한다.

$\dfrac{a}{a^2+9}=\dfrac{1}{a+\dfrac{9}{a}}$이고

$a+\dfrac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로 $\dfrac{a}{a^2+9}\leqq\dfrac{1}{6}$

따라서, $\dfrac{a}{a^2+9}$의 최대값은 $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$이고 ㉠에서 등호가 성립할 때는 $a=\dfrac{9}{a}$일 때이므로

$a^2=9$ $\therefore$ $\mathbf{a=3}$ ($\because a>0$)

참고

산술평균과 기하평균의 대소 관계

(산술평균)$\geqq$(기하평균)

즉, $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

(단, $a>0$, $b>0$, 등호는 $a=b$일 때 성립)

10 (주어진 식)$=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}}$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{51}-\sqrt{50})$

$=\sqrt{51}-1$

$7<\sqrt{51}<8$이고 $7.5=\sqrt{(7.5)^2}=\sqrt{56.25}$이므로

$7<\sqrt{51}<7.5$ $\therefore 6<\sqrt{51}-1<6.5$

따라서, 구하는 가장 가까운 정수는 **6**이다.

11 $\underbrace{111\cdots111}_{2n\text{개}}-\underbrace{222\cdots222}_{n\text{개}}$

$=\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}\underbrace{000\cdots000}_{n\text{개}}+\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}-\underbrace{222\cdots222}_{n\text{개}}$

$=\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}\times 1\underbrace{000\cdots000}_{n\text{개}}-\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}$

$=\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}\cdot(1\underbrace{000\cdots000}_{n\text{개}}-1)$

$=\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}\times\underbrace{999\cdots999}_{n\text{개}}$

$=9\cdot(\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}}\times\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}})$

$=3^2\cdot(\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}})^2$

$=\{3\cdot(\underbrace{111\cdots111}_{n\text{개}})\}^2$

$=(\underbrace{333\cdots333}_{n\text{개}})^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(333\cdots333)^2}$

$=\mathbf{333\cdots333}$ **(3이 n개)**

12 $\overline{BE}=x$, $\overline{DE}=y$라 하면

$\triangle ABE : \triangle ADE = x : y$이므로

$36 : \triangle ADE = x : y$

$\therefore \triangle ADE = \dfrac{36y}{x}$

$\triangle BCE : \triangle CDE = x : y$이므로

$\triangle BCE : 25 = x : y$

$\therefore \triangle BCE = \dfrac{25x}{y}$

$$\square ABCD = \triangle ABE + \triangle CDE + \triangle ADE + \triangle BCE$$
$$= 35 + 25 + \frac{36y}{x} + \frac{25x}{y}$$

그런데 $\dfrac{36y}{x} + \dfrac{25x}{y} \geqq 2\sqrt{\dfrac{36y}{x} \cdot \dfrac{25x}{y}} = 60$이므로

$\square ABCD \geqq 36 + 25 + 60 = 121$

따라서, $\square ABCD$의 넓이의 최소값은 **121**이다.

올림피아드 대비 문제

P. 26~27

1 $\sqrt{2006}-\sqrt{2005}<\sqrt{2004}-\sqrt{2003}$　　**2** ④

3 7　　**4** $5(\sqrt{6}-2)$cm

1 $\sqrt{2006}-\sqrt{2005}$

$$= \frac{(\sqrt{2006}-\sqrt{2005})(\sqrt{2006}+\sqrt{2005})}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}}$$

$\sqrt{2004}-\sqrt{2003}$

$$= \frac{(\sqrt{2004}-\sqrt{2003})(\sqrt{2004}+\sqrt{2003})}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}$$

그런데 $\sqrt{2006}>\sqrt{2004}$, $\sqrt{2005}>\sqrt{2003}$이므로

$\sqrt{2006}+\sqrt{2005}>\sqrt{2004}+\sqrt{2003}$이고

$$\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2005}} < \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}$$

$\therefore \boldsymbol{\sqrt{2006}-\sqrt{2005}<\sqrt{2004}-\sqrt{2003}}$

2 $$\frac{1}{x+\sqrt{2}+x\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$
$$= \frac{1}{x(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{1}{(x+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{(x-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{x\sqrt{3}-x-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(x^2-2)\cdot 2}$$
$$= \frac{1}{2(x^2-2)}(-x+\sqrt{2}+x\sqrt{3}-\sqrt{6})$$
$$\therefore \boldsymbol{a = -\frac{x}{2(x^2-2)}}$$

참고

무리수가 서로 같을 조건

① a, b, c, d가 유리수이고, $\sqrt{m}$이 무리수일 때,
$a+b\sqrt{m}=0$이면 $a=0$, $b=0$
$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$이면 $a=c$, $b=d$

② a, b가 유리수이고, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$이 무리수일 때,
$a+\sqrt{m}=b+\sqrt{n}$이면 $a=b$, $m=n$

③ a, b, c가 유리수이고, $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$이 무리수일 때,
$a\sqrt{l}+b\sqrt{m}+c\sqrt{n}=0$이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$

3 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$R_n=\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)$　　…… ㉠

㉠의 양변에 $(a+b)$를 곱하면

$$(a+b)R_n=\frac{1}{2}(a+b)(a^n+b^n)$$
$$=\frac{1}{2}(a^{n+1}+ab^n+a^nb+b^{n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(a^{n+1}+b^{n+1})+\frac{1}{2}ab(a^{n-1}+b^{n-1})$$
$$=R_{n+1}+abR_{n-1}$$

$a+b=4$, $ab=1$이므로 $4R_n=R_{n+1}+R_{n-1}$

$\therefore R_{n+1}=4R_n-R_{n-1}$

$$R_{n+2}=4R_{n+1}-R_n$$
$$=4(4R_n-R_{n-1})-R_n$$
$$=15R_n-4R_{n-1}$$
$$R_{n+3}=4R_{n+2}-R_{n+1}$$
$$=4(15R_n-4R_{n-1})-(4R_n-R_{n-1})$$
$$=56R_n-15R_{n-1}$$
$$R_{n+4}=4R_{n+3}-R_{n+2}$$
$$=4(56R_n-15R_{n-1})-(15R_n-4R_{n-1})$$
$$=209R_n-56R_{n-1}$$

$R_{n+5}=4R_{n+4}-R_{n+3}$
$=4(209R_n-56R_{n-1})-(56R_n-15R_{n-1})$
$=780R_n-209R_{n-1}$
$=780R_n-210R_{n-1}+R_{n-1}$
$=10(78R_n-21R_{n-1})+R_{n-1}$

따라서, R_{n+5}와 R_{n-1}의 일의 자리 수는 같다.

$R_0=\frac{1}{2}(a^0+b^0)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=\underline{1}$

$R_1=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}\cdot 4=\underline{2}$

$R_2=4R_1-R_0=4\cdot 2-1=\underline{7}$

$R_3=4R_2-R_1=4\cdot 7-2=2\underline{6}$

$R_4=4R_3-R_2=4\cdot 26-7=9\underline{7}$

$R_5=4R_4-R_3=4\cdot 97-26=36\underline{2}$

$R_6=4R_5-R_4=4\cdot 362-97=135\underline{1}$

$R_7=4R_6-R_5=4\cdot 1351-362=504\underline{2}$

따라서, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6의 일의 자리 수는 차례로 2, 7, 6, 7, 2, 1이고 R_n의 일의 자리 수는 이 6개의 수가 순환한다.

$\therefore$ (R_{2006}의 일의 자리 수)=($R_{6\times 334+2}$의 일의 자리 수)
=(R_2의 일의 자리 수)=**7**

4 두 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 $x$cm, $y$cm $(x<y)$라 하면

두 삼각형의 세 변의 길이의 합이 15cm이므로

$3x+3y=15,\ x+y=5$ …… ㉠

두 삼각형의 넓이의 비가 2 : 3이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 : \frac{\sqrt{3}}{4}y^2=2:3,\ x:y=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ …… ㉡

㉡에서 $\sqrt{2}y=\sqrt{3}x$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{\sqrt{6}}{2}x=5,\ \frac{\sqrt{6}+2}{2}x=5$

$\therefore x=\frac{10}{\sqrt{6}+2}=\frac{10(\sqrt{6}-2)}{2}=$**$5(\sqrt{6}-2)$(cm)**

식의 계산

특목고 대비 문제

P. 32~41

1 -1 **2** 49 **3** $9+7\sqrt{2}$ **4** 14
5 $-2a$ **6** 54 **7** 15 **8** $\sqrt{73}$ **9** -6
10 3 **11** $2\sqrt{3}$ **12** 8개 **13** 2개 **14** 40
15 이등변삼각형 **16** $3abc(a-b)(b-c)(c-a)$
17 $\frac{1}{3^{16}}$ **18** a^3 **19** $\left(\frac{1}{xyz}\right)^2$ **20** 1
21 y **22** $(x+4)(x-5)$ **23** 192 **24** 1
25 999 **26** 36 **27** z가 빗변인 직각삼각형
28 33 **29** $3-\sqrt{2}$ **30** 1
31 (1) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
(2) $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$
(3) $(x^2+8x+6)(x^2+4x+6)$
(4) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
32 10 **33** 120 **34** 18 **35** 2 **36** $\frac{1}{3}$
37 -6 **38** 55

1 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$

$x-2=-\sqrt{3}$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=3$

$\therefore x^2-4x=$**-1**

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$=|a|^2-2ab+|b|^2$
$=16+2\cdot 4\cdot 3+9$ ($\because ab<0$)
=**49**

3 (주어진 식)$=a^2(a+b)+b^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$
$=(\sqrt{2}+1)\{(\sqrt{2}+1)^2+2\}$
$=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}+2)$
$=(1+\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})$
$=5+2\sqrt{2}+5\sqrt{2}+4$
=**$9+7\sqrt{2}$**

4 $x^2-4x+1=0$은 $x=0$을 근으로 하지 않으므로 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0,\ x+\frac{1}{x}=4$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+\frac{1}{x^2}&=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=16-2\\&=\mathbf{14}\end{aligned}$$

5 $a-b<0$이므로 $a<b$

$ab<0$이므로 a와 b는 서로 다른 부호이다.

$\therefore a<0,\ b>0$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\sqrt{(a-b)^2}+|a|-|b|\\&=|a-b|+|a|-|b|\\&=-(a-b)-a-b\\&=\mathbf{-2a}\end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=ab(a^2+ab+b^2)\\&=ab\{(a-b)^2+3ab\}\\&=3\cdot(9+9)\\&=\mathbf{54}\end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^2(x-y)-y^2(x-y)\\&=(x-y)(x^2-y^2)\\&=(x-y)^2(x+y)\\&=\{(x+y)^2-4xy\}(x+y)\\&=(9-4)\cdot 3\\&=\mathbf{15}\end{aligned}$$

8
$$\begin{aligned}(x-y)^2&=(x+y)^2-4xy\\&=81-8=73\end{aligned}$$

$\therefore x-y=\sqrt{73}\ \ (\because x>y)$

9 $(\text{주어진 식})=(-3x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$

에서 x^2이 되는 항은

$(-3x^2)\times 1+2x\times(-2x)+1\times x^2$

$=-3x^2-4x^2+x^2=-6x^2$

따라서, x^2의 계수는 $\mathbf{-6}$

10 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\ \frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0\ (\because abc\neq 0)$ ······㉠

$$\begin{aligned}P&=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{ab+ca+bc+ab+ca+bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

$a+b+c=t$라 하면

$$\begin{aligned}Q&=\frac{t-a}{a}+\frac{t-b}{b}+\frac{t-c}{c}\\&=\frac{t}{a}-1+\frac{t}{b}-1+\frac{t}{c}-1\\&=\frac{t}{a}+\frac{t}{b}+\frac{t}{c}-3\\&=t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\\&=-3\left(\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\right)\end{aligned}$$

$\therefore P-Q=0-(-3)=\mathbf{3}$

11 $x=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore x-\frac{1}{x}&=2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\\&=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\\&=\mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

다른풀이

$$\begin{aligned}x-\frac{1}{x}&=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\&=\frac{(4+2\sqrt{3})-(4-2\sqrt{3})}{3-1}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

12
$$\begin{aligned}x^2+4x-n&=(x+a)(x+b)\\&=x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

$a+b=4,\ ab=-n$이므로 표로 나타내면 다음과 같다.

a	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
b	5	6	7	8	9	10	11	12
n	5	12	21	32	45	60	77	96

따라서, 모두 **8개**이다.

13
$$\begin{aligned}x^4+x^2-n&=(x^2+A)(x^2-B)\\&=x^4+(A-B)x^2-AB\end{aligned}$$

$A-B=1$에서 $A=B+1,\ AB=n(1\leqq n\leqq 10)$이므로 표로 나타내면 다음과 같다.

B	1	2
A	2	3
n	2	6

따라서, 구하는 다항식은 x^4+x^2-2와 x^4+x^2-6의 **2개**이다.

14 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$, $\frac{b-a}{ab}=2$

$a-b=-2ab$ ……㉠

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=3$, $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=3$, $a^2+b^2=3a^2b^2$

$(a-b)^2+2ab=3a^2b^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2ab)^2+2ab=3a^2b^2$, $a^2b^2+2ab=0$

$ab(ab+2)=0$

$\therefore ab=-2$ ($\because ab\neq0$) ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a-b=4$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=4^3+3\cdot(-2)\cdot4$

$=\mathbf{40}$

15 $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$

$=ab^3-ac^3+bc^3-ba^3+ca^3-cb^3$

$=a^3(c-b)-(c^3-b^3)a+bc(c^2-b^2)$

$=a^3(c-b)-(c-b)(c^2+bc+b^2)a+bc(c-b)(c+b)$

$=(c-b)\{a^3-(c^2+bc+b^2)a+bc(c+b)\}$

$=(c-b)(a^3-ac^2-abc-ab^2+bc^2+b^2c)$

$=(c-b)\{b^2(c-a)+(c^2-ac)b-a(c^2-a^2)\}$

$=(c-b)\{b^2(c-a)+c(c-a)b-a(c-a)(c+a)\}$

$=(c-b)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$=(c-b)(c-a)\{(b-a)c+(b-a)(b+a)\}$

$=(c-b)(c-a)(b-a)(c+b+a)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=0$

$a+b+c\neq0$이므로 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서, **이등변삼각형**이다.

16 $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$

$=\{a(b-c)\}^3+\{b(c-a)\}^3+\{c(a-b)\}^3$

$a(b-c)=A$, $b(c-a)=B$, $c(a-b)=C$라 하면

$3ABC=3a(b-c)b(c-a)c(a-b)$

$=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

$A+B+C=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$

$=ab-ac+bc-ab+ac-bc$

$=0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=A^3+B^3+C^3-3ABC+3ABC$

$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$
$+3ABC$

$=3ABC$ ($\because A+B+C=0$)

$=\mathbf{3abc(a-b)(b-c)(c-a)}$

17 $\frac{2}{3}A=\left(1-\frac{1}{3}\right)A$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3^8}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=1-\frac{1}{3^{16}}$

$\therefore 1-\frac{2}{3}A=1-\left(1-\frac{1}{3^{16}}\right)=\mathbf{\frac{1}{3^{16}}}$

18 (주어진 식)$=a(ad+be+df)+(be+ce)(c+f)$
$+(d+e+f)f^2$

$=a(ad+be+df)+(b+c)e(c+f)$
$+(d+e+f)f^2$

$=a(ad+be+df)+ae(c+f)+af^2$

$=a(ad+be+df)+a(ce+ef+f^2)$

$=a\{ad+(b+c)e+(d+e+f)f\}$

$=a(ad+ae+af)$ ($\because a=b+c=d+e+f$)

$=a^2(d+e+f)$

$=\mathbf{a^3}$

19 (주어진 식)$=\frac{1}{x+y+z}\times\frac{xy+yz+zx}{xyz}$

$\times\frac{1}{xy+yz+zx}\times\frac{x+y+z}{xyz}$

$=\mathbf{\left(\frac{1}{xyz}\right)^2}$

20 $ab=\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}\times\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}$

$=\frac{1}{\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}^3}=1$

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{(b+1)+(a+1)}{(a+1)(b+1)}$

$=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}$

$=\frac{a+b+2}{a+b+2}$ ($\because ab=1$)

$=\mathbf{1}$

21 $\sqrt{x+A}=\sqrt{x+\frac{2xy}{y^2+1}}=\sqrt{\frac{xy^2+x+2xy}{y^2+1}}$

$=\sqrt{\frac{x(y^2+2y+1)}{y^2+1}}=\frac{\sqrt{x}(y+1)}{\sqrt{y^2+1}}$

$\sqrt{x-A}=\sqrt{x-\frac{2xy}{y^2+1}}=\sqrt{\frac{xy^2+x-2xy}{y^2+1}}$

$=\sqrt{\frac{x(y^2-2y+1)}{y^2+1}}=\frac{\sqrt{x}(y-1)}{\sqrt{y^2+1}}$

($\because$ $y\geqq 1$이므로 $\sqrt{(y-1)^2}=|y-1|=y-1$)

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^2+1}}\{(y+1)+(y-1)\}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^2+1}}\{(y+1)-(y-1)\}}$

$=\frac{2y}{2}=\boldsymbol{y}$

22 철이는 상수항을 바르게 보았으므로

$(x+2)(x-10)=x^2-8x-20$에서 상수항은 -20

미애는 x의 계수를 바르게 보았으므로

$(x+6)(x-7)=x^2-x-42$에서 x항은 $-x$

따라서, 주어진 이차식은 x^2-x-20이므로

$x^2-x-20=\boldsymbol{(x+4)(x-5)}$

23 $x=\frac{(\sqrt{3}-2)^2}{3-4}=-(7-4\sqrt{3})=-7+4\sqrt{3}$

$y=\frac{(\sqrt{3}+2)^2}{3-4}=-(7+4\sqrt{3})=-7-4\sqrt{3}$

$x+y=-14$, $xy=49-48=1$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)+14xy}{x+y}$

$=\frac{(-14)^3-3\times1\times(-14)+14\times1}{-14}$

$=14^2-3-1$

$=\mathbf{192}$

24 (주어진 식)$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}$

$+\frac{abc}{abca+abc+ab}$

$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}$

$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}$

$=\mathbf{1}$

25 $x=1000$이라 하면

(주어진 식)$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x+1)+1}$

$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$

$=x-1=\mathbf{999}$

26 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-6=3$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-8=8$

$\therefore$ (주어진 식)$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

$=3\times8+3\times4=\mathbf{36}$

27 (주어진 식)$=x^4+2x^2y^2+y^4-(x^2+y^2)z^2$

$=(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)z^2$

$=(x^2+y^2)(x^2+y^2-z^2)$

$=0$

$x^2+y^2\neq0$이므로 $x^2+y^2=z^2$

따라서, **z가 빗변인 직각삼각형**이다.

28 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9-2\times2=5$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=27-3\times2\times3=9$

$\therefore$ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

$=5\times9-4\times3$

$=\mathbf{33}$

29 $a-b=-1$ ······㉠

$b-c=\sqrt{2}$ ······㉡

㉠+㉡을 하면 $a-c=\sqrt{2}-1$, $c-a=1-\sqrt{2}$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\Big\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\Big\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2\}$

$=\frac{1}{2}(1+2+3-2\sqrt{2})$

$=\mathbf{3-\sqrt{2}}$

30 $x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$3xyz=x^3+y^3+z^3$이므로
$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$,
$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$
$x+y+z\neq0$이므로 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$
$\therefore \dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx}=\mathbf{1}$

31 (1) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=\mathbf{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$
(2) $x^4-3x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(xy)^2$
$=\mathbf{(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)}$
(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)-3x^2$
$=\{(x+1)(x+6)\}\{(x+2)(x+3)\}-3x^2$
$=(x^2+7x+6)(x+5x+6)-3x^2$
$x^2+6x+6=t$라 하면
(주어진 식)$=(t+x)(t-x)-3x^2$
$=t^2-x^2-3x^2$
$=t^2-4x^2$
$=(t+2x)(t-2x)$
$=\mathbf{(x^2+8x+6)(x^2+4x+6)}$
(4) $a+b+c=t$라 하면
(주어진 식)$=(t-c)(t-a)(t-b)+abc$
$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t$
$-abc+abc$
$=t\{t^2-(a+b+c)t+ab+bc+ca\}$
$=t(t^2-t^2+ab+bc+ca)$
$=t(ab+bc+ca)$
$=\mathbf{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

32 $\begin{cases} x+y=2\sqrt{3} & \cdots\cdots ㉠ \\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times\sqrt{3}-$㉡을 하면
$(\sqrt{3}+\sqrt{2})y=1$
$\therefore y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ……㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$x+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
따라서, $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}-\sqrt{2}$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(2\sqrt{3})^2-2\times1$
$=\mathbf{10}$

33 $x^2-5x+1=0$ ……㉠
㉠에 $x=0$을 대입하면 성립하지 않으므로 $x\neq0$
㉠의 양변을 x로 나누면
$x-5+\dfrac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\dfrac{1}{x}=5$
$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=5^3-3\times5=110$
$\therefore$ (주어진 식)$=110+2\times5=\mathbf{120}$

34 (주어진 식)$=32\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$
$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{8}\right)\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$
$=32\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots$
$\times\dfrac{7}{8}\times\dfrac{9}{8}$
$=32\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{8}$
$=\mathbf{18}$

35 $(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-3})(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-3})$
$=(x^2+9)-(x^2-3)=12$
이므로 $6(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-3})=12$
$\therefore \sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-3}=\mathbf{2}$

36 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
이므로 $3^2=13+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-2$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
이므로 $27-3abc=3\times(13+2)$
$\therefore abc=-6$
$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{-2}{-6}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

37 $(x-1)(y-1)(z-1)$
$=(xy-x-y+1)(z-1)$
$=xyz-xy-xz+x-yz+y+z-1$
$=xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1$
$=-12-(-4)+3-1$
$=\mathbf{-6}$

38 연속한 네 자연수를 x, $x+1$, $x+2$, $x+3$이라 하면
$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=k^2$(k는 자연수)이므로
좌변을 인수분해하면
$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$x^2+3x=A$로 치환하면
$A(A+2)+1=A^2+2A+1=(A+1)^2$
$=(x^2+3x+1)^2=k^2$
따라서, 연속한 네 자연수의 곱에 1을 더한 수는 어떤 자연수의 제곱이 된다.
또한, 위의 성질을 이용하면
$6\times7\times8\times9+1=(6^2+3\times6+1)^2=\boxed{55}^2$

P. 42~43

특목고 구술·면접 대비 문제

1 $\frac{1}{2}a^3-\frac{9}{2}a$ **2** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
3 풀이 참조 **4** $a=b$인 이등변삼각형

1 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ……㉠
㉠의 양변을 세제곱하면
$a^3=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$
$=2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
$=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\sqrt{3}$을 제거하기 위하여
㉡$-$㉠$\times9$를 하면
$a^3-9a=2\sqrt{2}$
$\therefore \sqrt{2}=\mathbf{\frac{1}{2}a^3-\frac{9}{2}a}$

2 $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$라 하면 $ab=1$

$$\sqrt{X}=\sqrt{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2}=\frac{a^n+b^n}{2}$$

$$\sqrt{X-1}=\sqrt{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2-1}$$
$$=\sqrt{\frac{a^{2n}+2+b^{2n}}{4}-1}\ (\because ab=1)$$
$$=\sqrt{\frac{a^{2n}-2+b^{2n}}{4}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a^n-b^n}{2}\right)^2}=\frac{a^n-b^n}{2}$$

$$\sqrt{X}-\sqrt{X-1}=\frac{a^n+b^n}{2}-\frac{a^n-b^n}{2}=b^n$$

$$\therefore \frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{(b^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{b}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

3 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$\therefore a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$ $(\because a+b+c=0)$
위의 식의 양변을 제곱하면
$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2$ ……㉠
(㉠의 좌변)
$=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ ……㉡
(㉠의 우변)
$=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}$
$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ $(\because a+b+c=0)$ ……㉢
㉡$=$㉢이므로
$a^4+b^4+c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$\therefore a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
위의 식의 양변에 2를 곱하면
$2(a^4+b^4+c^4)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$
$=$(㉠의 우변)
$=\{2(ab+bc+ca)\}^2$
따라서, a, b, c가 정수이므로
$\{2(ab+bc+ca)\}^2$은 제곱수이다.
그러므로 $2(a^4+b^4+c^4)$은 제곱수이다.

4 차수가 가장 낮은 문자 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=-c^2(a-b)+2bc(a-b)+a^2(a-b)$
$-b^2(a-b)$
$=(a-b)(-c^2+2bc+a^2-b^2)$
$=(a-b)\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}$
$=(a-b)\{a^2-(b-c)^2\}$
$=(a-b)(a+b-c)(a-b+c)$
$=0$
그런데 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a+b-c>0$, $a-b+c>0$
$\therefore a-b=0$ $\quad\therefore a=b$
따라서, **$a=b$인 이등변삼각형**이다.

시·도 경시 대비 문제

P. 44~47

1 ④ **2** $(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)$
3 27 **4** 2
5 $(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)$
6 -1 **7** -4 또는 0 **8** 19 **9** $\frac{9}{2}$
10 $\frac{1}{3}$ **11** 3 **12** 2^{2n-1}

1 $A=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1=3n^2+2$

(i) $n=3k$일 때, $A=3(3k)^2+2=27k^2+2$
$=3(9k^2)+2$

(ii) $n=3k+1$일 때, $A=3(3k+1)^2+2$
$=27k^2+18k+5$
$=3(9k^2+6k+1)+2$

(iii) $n=3k+2$일 때, $A=3(3k+2)^2+2$
$=27k^2+36k+14$
$=3(9k^2+12k+4)+2$

(i)~(iii)에서 A는 모두 (3의 배수+2)의 꼴이므로 제곱수가 아니다.
따라서, $\sqrt{A}$는 **무리수**이다.

2 $x^3-y^3-1-3xy$
$=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3\times x\times(-y)\times(-1)$
$=\boldsymbol{(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)}$

참고
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

3 $b-a$의 값은 두 다항식의 뺄셈에서의 x^4의 계수와 같다.
$7x^3+5x^2+3x+1=t$라 하면
$(9x^4+7x^3+5x^2+3x+1)^3-(7x^3+5x^2+3x+1)^2$
$=(9x^4+t)^3-t^3$
$=(9x^4+t-t)\{(9x^4+t)^2+(9x^4+t)t+t^2\}$
$=9x^4(81x^8+18tx^4+t^2+9tx^4+t^2+t^2)$
$=9x^4(81x^8+27tx^4+3t^2)$
그런데 (   ) 안의 상수항은 t^2에 있는 1, 즉
$(7x^3+5x^2+3x+1)^2$의 1뿐이므로 x^4의 계수는
$3\times9=\mathbf{27}$

4 $x=\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$의 양변에 $(2-\sqrt[3]{2})$를 곱하면
$(2-\sqrt[3]{2})x=1,\ 2x-\sqrt[3]{2}x=1$
$2x-1=\sqrt[3]{2}x$
위의 식의 양변을 세제곱하면
$(2x-1)^3=(\sqrt[3]{2}x)^3$
$8x^3-12x^2+6x-1=2x^3$
$6x^3-12x^2+6x=1$
$\therefore 3x^3-6x^2+3x=\frac{1}{2}$
$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\mathbf{2}$

5 Ⅰ. $x^2+y^2=A$
Ⅱ. $x^3+y^3=B(x+y)$
$B=\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}$
$=x^2-xy+y^2\ (\because x>0, y>0)$
Ⅲ. $A-B=36$이므로
$(x^2+y^2)-(x^2-xy+y^2)=xy=36$
$\therefore (x, y)=\mathbf{(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6)}$

6 $x-1=a,\ y+3=b$라 하면
(주어진 식)$=\frac{ab}{4a^2+b^2}=-\frac{1}{4}$에서
$4a^2+b^2=-4ab$
$4a^2+4ab+b^2=0$
$(2a+b)^2=0$
그런데 $2a+b=2(x-1)+y+3=2x+y+1$
이므로 $(2x+y+1)^2=0$
$\therefore 2x+y=\mathbf{-1}$

7 $x^2+4x+9=(x+2)^2+5=k^2$ (k는 정수)라 하면
$k^2-(x+2)^2=5$
$(k+x+2)(k-x-2)=5$
x와 k는 모두 정수이므로

$k+x+2$	1	5	-1	-5
$k-x-2$	5	1	-5	-1
k	3	3	-3	-3
x	-4	0	0	-4

$x=-4$ 또는 $x=0$일 때, k의 값은 -3 또는 3이다.
따라서, x^2+4x+9가 어떤 정수의 제곱이 되도록 하는 정수 x는 **-4 또는 0**이다.

8 주어진 식을 a에 관하여 정리하면

$a(bc+2b+2c+4)+2(bc+2b+2c+4)-8=447$

$(a+2)(bc+2b+2c+4)=447+8$

$(a+2)\{b(c+2)+2(c+2)\}=455$

$(a+2)(b+2)(c+2)=5\times7\times13$

a, b, c가 서로 바뀌어도 일반성을 가지므로

$a=3, b=5, c=11$ $\quad\therefore a+b+c=\mathbf{19}$

9 $2x-3=a$, $2y-3=b$라 하면 주어진 식은

$\dfrac{ab}{a^2+4b^2}=-\dfrac{1}{4}$에서 $a^2+4b^2=-4ab$

$a^2+4ab+4b^2=0$, $(a+2b)^2=0$

$\therefore a+2b=0$

$2x-3+2(2y-3)=0$, $2x+4y=9$

$\therefore x+2y=\mathbf{\dfrac{9}{2}}$

10 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2y}{x-z}$에서 $x^2-zx=2y^2$

$x^2-2y^2=zx$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2x+y}{z}$에서 $2xy+y^2=zx$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠−㉡을 하면

$x^2-2xy-3y^2=0$, $(x-3y)(x+y)=0$

$x>0$, $y>0$이므로 $x+y\neq0$ $\quad\therefore x=3y$

$\therefore \dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{3y}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

11 $a=3^n-9$, $b=9^n-3$이라 하면 주어진 식은

$a^3+b^3=(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$

$3ab(a+b)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $a+b=0$

(i) $a=0$일 때, $3^n-9=0$

$3^n=9=3^2$ $\quad\therefore n=2$

(ii) $b=0$일 때, $9^n-3=0$

$9^n=3^{2n}=3$ $\quad\therefore n=\dfrac{1}{2}$

그런데 n은 자연수라는 조건을 만족하지 않는다.

(iii) $a+b=0$일 때, $3^n+9^n-12=0$

$(3^n)^2+3^n-12=0$, $(3^n+4)(3^n-3)=0$

$3^n+4>0$이므로 $3^n=3$ $\quad\therefore n=1$

(i)~(iii)에서 자연수 n은 1과 2이다.

$\therefore 1+2=\mathbf{3}$

12 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$4^n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

주어진 등식에 $x=-1$을 대입하면

$0=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠+㉡을 하면

$4^n=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=2S$

$\therefore S=\dfrac{4^n}{2}=\dfrac{2^{2n}}{2}=\mathbf{2^{2n-1}}$

P. 48~49

대비 문제

1 9 **2** 2701 **3** 48 **4** −1

1 Ⅱ에서

$x^2\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y^2\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+3=0$

$x^2\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y^2\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+z^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+(x+y+z)$

$=0$ ($\because$ Ⅰ에서 $x+y+z=3$)

$x^2\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)+y^2\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+z^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

$=0$

$(x^2+y^2+z^2)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=0$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ ($\because$ $xyz\neq0$이므로 $x^2+y^2+z^2\neq0$)

$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0$이므로 $xy+yz+zx=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=3^2-2\times0=\mathbf{9}$

2 $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$이라 하면

$0<y<1$이므로 $0<y^2<1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$x^6=(2+\sqrt{3})^6=\{(2+\sqrt{3})^2\}^3$

$=(7+4\sqrt{3})^3=(7+4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^2$

$=(7+4\sqrt{3})(97+56\sqrt{3})$

$=1351+780\sqrt{3}$

$y^6=(2-\sqrt{3})^6=1351-780\sqrt{3}$

$x^6+y^6=2702$에서 $x^6=2701+(1-y^6)$

㉠에서 $-1<-y^2<0$이므로 $0<1-y^6<1$

따라서, $x^6=2701.\times\times\times\cdots$이므로

$[x^6]=[(2+\sqrt{3})^6]=\mathbf{2701}$

3 $a-b=-4,\ b-c=-4,\ c-a=8$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\{(-4)^2+(-4)^2+8^2\}$

$=48(a+b+c)$

따라서, $a^3+b^3+c^3-3abc$는 $a+b+c$의 48배가 되므로

$k=48$

4 $a+\frac{4}{b}=1$의 양변에 b를 곱하면

$ab+4=b$ ······㉠

$b+\frac{1}{c}=4$의 양변에 c를 곱하면

$bc+1=4c$ ······㉡

㉠의 양변에 c를 곱하면

$abc+4c=bc$ ······㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$abc+bc+1=bc$

$\therefore abc=-1$

이차방정식

P. 54~67

특목고 대비 문제

1 ③ **2** ① **3** -4 **4** $m=8,\ -10$
5 -1 **6** 2 **7** 15, 12, -3, 0 **8** -2
9 $\sqrt{2}$ **10** $x^2+7x-6=0,\ x=\frac{-7\pm\sqrt{23}}{2}$
11 $x=0,\ -4,\ -2\pm\sqrt{6}$ **12** 0 또는 5
13 풀이 참조 **14** $400\pi\,\text{m}^2$
15 $p=-25,\ q=156$ **16** 15 **17** 1
18 (1) $x=-1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$ (2) $x=-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ 2,\ 3$
19 10 **20** ⑤ **21** $x^2-2x-1=0$
22 $-8+2\sqrt{5}$ **23** 28 **24** $x=\pm7$
25 $p=\pm3,\ q=2$ **26** 32
27 (1) $4x+26$ (2) $x=11$ (3) 320장
28 116 cm **29** ④ **30** 2 **31** ①
32 $a=c$인 이등변삼각형 **33** $x^2-7x+12=0$
34 6개 **35** $a=-6$, 두 근은 2, 4 **36** $\frac{2}{3}$
37 50일 **38** 1 **39** $-\frac{1}{3}$ **40** ② **41** 320
42 ④ **43** -5 **44** -2 **45** -1
46 $2:-1+\sqrt{5}$ 또는 $1+\sqrt{5}:2$ **47** ②

1 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=t$라 하면 $(t>0)$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=4+2\sqrt{1}=6$

그런데 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$이므로 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}$

2 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=-1-\frac{3}{2}+1=-\frac{3}{2}$

$\therefore x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$\therefore b=-\frac{1}{2},\ c=-\frac{3}{2}$ $\quad\therefore b+c=-2$

3 $x=2$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근이므로 $x=2$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$4a+2b+c=0$ ……㉠

점 $(-1, 2)$를 $y=ax^2$, $y=-bx-c$에 각각 대입하면 $a=2$, $b-c=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$, $c=-4$

$\therefore a+b+c=\mathbf{-4}$

4 두 근의 차가 1이므로 두 근을 p, $p+1$이라 하면

$(x-p)(x-p-1)=0$, $x^2-(2p+1)x+p^2+p=0$

$p^2+p=20$, $(p+5)(p-4)=0$

$\therefore p=-5$ 또는 $p=4$

(i) $p=-5$일 때, $-(2p+1)=9=1+m$

$\therefore m=8$

(ii) $p=4$일 때, $-(2p+1)=-9=1+m$

$\therefore m=-10$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{m=8}$ **또는** $\boldsymbol{m=-10}$

5 $x+y=t$라 하면 $t(t-4)-5=0$

$t^2-4t-5=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

그런데 $x<0$, $y<0$이므로 $x+y<0$

$\therefore x+y=\mathbf{-1}$

6 $n(A)=1$이므로 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+4=0$은 중근을 가진다.

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-4=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ $(\because k>0)$

따라서, $k=3$일 때, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$

따라서, 집합 A의 원소는 **2**이다.

7 주어진 이차방정식의 두 정수해를 α, $\beta(\alpha\neq\beta)$라 하면

$\alpha+\beta=k+2$ ……㉠

$\alpha\beta=4k$ ……㉡

$D=(k+2)^2-16k>0$ ……㉢

㉢에서 $k^2-12k+4>0$

$k^2-12k+4=0$의 근이 $k=6\pm\sqrt{32}$이므로

$k^2-12k+4>0$에서 $k<6-\sqrt{32}$ 또는 $k>6+\sqrt{32}$

또한, ㉠$\times4-$㉡을 하면

$4\alpha+4\beta-\alpha\beta=8$, $\alpha(4-\beta)-4(4-\beta)=8-16$

$(\alpha-4)(4-\beta)=-8$, $(\alpha-4)(\beta-4)=8$

$\alpha-4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$\beta-4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1

α	5	6	8	12	3	2	0	-4
β	12	8	6	5	-4	0	2	3
$\alpha\beta$	60	48	48	60	-12	0	0	-12

따라서, $k=\dfrac{\alpha\beta}{4}$이므로 k의 값은 **15, 12, −3, 0**

8 주어진 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 $(a-4)x^2-a^2x+32=0$에 대입하면

$4(a-4)-2a^2+32=0$, $2a^2-4a-16=0$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

그런데 $a=4$이면 이차방정식이 아니므로 $a=\mathbf{-2}$

9 한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 k, $3k(k>0)$라 하면

(i) $k+3k=4k=\dfrac{4a}{a^2+1}$

$k=\dfrac{a}{a^2+1}$ ……㉠

$k>0$이므로 $a>0$ ……㉡

(ii) $k\times3k=3k^2=\dfrac{2}{a^2+1}$ ……㉢

(iii) $\dfrac{D}{4}=(2a)^2-2(a^2+1)>0$

$4a^2-2a^2-2>0$

$2(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ ……㉣

한편, ㉠을 ㉢에 대입하면

$3\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2=\dfrac{2}{a^2+1}$, $\dfrac{3a^2}{a^2+1}=2$

$2a^2+2=3a^2$, $a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$ ……㉤

㉡, ㉣, ㉤에서 $a=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

10 보아가 구한 근으로부터

$(x-2)(x+3)=0$, $x^2+x-6=0$

보아는 x의 계수 a를 잘못 보았으므로 상수항 b는 옳게 보았다.

$\therefore b=-6$

혜성이가 구한 근으로부터

$(x-1)(x+8)=0$, $x^2+7x-8=0$

혜성이는 상수항 b를 잘못 보았으므로 x의 계수 a는 옳게 보았다.

$\therefore a=7$

그러므로 원래의 이차방정식은 $\boldsymbol{x^2+7x-6=0}$

$\therefore x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+24}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2}}$

11 $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)+15=0$

$\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}+15=0$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)+15=0$

$x^2+4x=A$라 하면

$(A-5)(A+3)+15=0,\ A^2-2A=0$

$A(A-2)=0 \qquad \therefore A=0$ 또는 $A-2=0$

(i) $x^2+4x=0,\ x(x+4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-4$

(ii) $x^2+4x-2=0 \qquad \therefore x=-2\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=0,\ -4,\ -2\pm\sqrt{6}}$

12 $x^2-6xy+9y^2+x-3y-6=0$

$(x-3y)^2+(x-3y)-6=0$

$x-3y=X$라 하면

$X^2+X-6=0,\ (X+3)(X-2)=0$

$(x-3y+3)(x-3y-2)=0$ ……㉠

$x-3y=(a+6\sqrt{3})-3(1+2\sqrt{3})=a-3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-3+3)(a-3-2)=0,\ a(a-5)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=0}$ **또는** $\boldsymbol{a=5}$

13 $x^2-2ax+a^2=x^2-2bx+b^2$

$2ax-2bx-a^2+b^2=0$

$2x(a-b)-(a-b)(a+b)=0$

$(a-b)\{2x-(a+b)\}=0$

따라서, $\boldsymbol{a\neq b}$**이면** $\boldsymbol{x=\dfrac{a+b}{2}}$, $\boldsymbol{a=b}$**이면 해가 무수히 많다.**

14 수영장의 반지름의 길이를 rm라 하면 콘크리트 벽의 넓이는

$\pi(r+2)^2-\pi r^2=\pi(r^2+4r+4)-\pi r^2=4\pi(r+1)$

벽의 넓이가 수영장의 넓이의 21%이므로

$\dfrac{21}{100}\pi r^2=4\pi(r+1),\ 21r^2-400r+400=0$

$(21r+20)(r-20)=0 \qquad \therefore r=20(\mathrm{m})\ (\because r>0)$

따라서, 수영장의 넓이는 $\pi\cdot 20^2=\boldsymbol{400\pi(\mathrm{m}^2)}$

15 주어진 이차방정식의 두 근이 연속하는 양의 정수이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$이라 하면

(i) $\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1=-p$

(ii) $\alpha\times(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=q$

그런데 두 근의 제곱의 차가 25이므로

$(\alpha+1)^2-\alpha^2=25,\ 2\alpha=24 \qquad \therefore \alpha=12$

$\therefore \boldsymbol{p}=-(2\alpha+1)=\boldsymbol{-25},\ \boldsymbol{q}=\alpha^2+\alpha=\boldsymbol{156}$

16 $a-b=t$라 하면 $t^2-3t-18=0$

인수분해하면 $(t-6)(t+3)=0,\ t=6$ 또는 $t=-3$

$\therefore a-b=6$ 또는 $a-b=-3$

그런데 $a>b$이므로 $a-b>0$

$\therefore a-b=6$ ……㉠

주어진 조건에서 $a+b=8$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립해서 풀면 $a=7,\ b=1$

$\therefore \boldsymbol{2a+b=15}$

17 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0$ ……㉠

$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$

$(a^2+2a)(\alpha-1)=0$

$\therefore a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $a^2+2a=0$일 때 $a^2=-2a$이므로 두 방정식이 일치하게 되어 오직 하나의 공통근을 가진다는 문제의 뜻에 맞지 않는다.

$\therefore \boldsymbol{\alpha=1}$

18 (1) $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$라 하면

$f(-1)=-2-1+5-2=0$이므로

$f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 오른쪽과 같이 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(2x^2-3x-2)$

$=(x+1)(x-2)(2x+1)$

따라서, 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x+1)=0$

$\therefore \boldsymbol{x=-1,\ 2,\ -\dfrac{1}{2}}$

(2) $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면

$6x^2-25x+12+\dfrac{25}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$

$6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+12=0$

$x-\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$이므로

$6(t^2+2)-25t+12=0$

$6t^2-25t+24=0,\ (2t-3)(3t-8)=0$

$\therefore t=\frac{3}{2}$ 또는 $t=\frac{8}{3}$

(i) $t=\frac{3}{2}$일 때, $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$2x^2-3x-2=0$, $(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(ii) $t=\frac{8}{3}$일 때, $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$

$3x^2-8x-3=0$, $(3x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2, 3}$

19 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$, $x+\frac{1}{x}=3$

양변을 제곱하면 $x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$, $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$$\therefore x^2+x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=7+3=\mathbf{10}$$

20 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 중근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=a^2-b=0$ ……㉠

한 개의 주사위를 두 번 던져서 차례로 나온 눈의 수 (a, b)는 $(1, 1)$에서 $(6, 6)$까지 36가지이다.

이 중에서 ㉠을 만족시키는 경우는 $(1, 1)$, $(2, 4)$의 두 가지이므로 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{18}}$

21 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$\alpha+1$, $\beta+1$이 $x^2-a^2x+ab=0$의 두 근이므로

(i) $(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=-a+2=a^2$

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a\neq 1$)

(ii) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=b-a+1=ab$

$b+2+1=-2b$, $3b=-3$ $\therefore b=-1$

따라서, 원래의 방정식은 $\boldsymbol{x^2-2x-1=0}$

22 $\sqrt{5}$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\sqrt{5}-2$이다.

따라서, x^2의 계수가 2이고 두 근이 2, $\sqrt{5}-2$인 이차방정식은 $2(x-2)\{x-(\sqrt{5}-2)\}=0$

$2x^2-2\sqrt{5}x+4\sqrt{5}-8=0$

따라서, $p=-2\sqrt{5}$, $q=4\sqrt{5}-8$이므로

$\boldsymbol{p+q=-8+2\sqrt{5}}$

23 $(x+y)^2<(x+y)^2+3x+y=1996<45^2$이므로

$x+y\leq 44$

만일 $x+y=44$라면

$(x+y)^2+3x+y=(x+y)^2+3(x+y)-2y$

$=1936+132-2y=1996$

$\therefore y=36$

만일 $x+y\leq 43$이라면

$2y=(x+y)^2+3(x+y)-1996$

$\leq 43^2+129-1996=-18$

에서 $y=-9$, 즉 y의 값이 음수가 되므로 문제의 조건에 적합하지 않다.

따라서, y의 값은 36 하나 뿐이다.

$y=36$을 주어진 방정식에 대입하면

$(x+36)^2+3x+36=1996$

$x^2+72x+3x+36^2+36-1996=0$

$x^2+75x-664=0$, $(x+83)(x-8)=0$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

따라서, y의 값과 x의 값의 차는 **28**이다.

24 (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}\right)+\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)$$
$$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{(x-5)(x+5)}=\frac{5}{12}$$

$(x-5)(x+5)=24$, $x^2=49$

$\therefore \boldsymbol{x=\pm 7}$

참고

부분분수 분해

$$\frac{C}{AB}=\frac{C}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

25 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수) 이라 하면

$\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1=-p$, $\alpha=\frac{-p-1}{2}$ ……㉠

$\alpha(\alpha+1)=q$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p^2-4q=1$ ……㉢

㉡으로부터 q는 짝수임을 알 수 있고 q는 소수이므로

$q=2$

$q=2$를 ㉢에 대입하면 $p^2=9$ $\therefore p=\pm 3$

(i) $p=-3$, $q=2$일 때, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=2$

이것은 두 근이 연속하는 정수라는 조건을 만족한다.

(ii) $p=3$, $q=2$일 때, $x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

이것은 두 근이 연속하는 정수라는 조건을 만족한다.

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{p=\pm3, q=2}$

26 에스컬레이터의 높이를 나타내는 총 계단의 수를 x라 하면 A는 24계단을 내려왔으므로 A가 내려올 때 실제로 에스컬레이터가 내려온 계단 수는 $(x-24)$이다.

B는 16계단을 내려왔으므로 B가 내려올 때 실제로 에스컬레이터가 내려온 계단 수는 $(x-16)$이다.

에스컬레이터가 1계단 내려오는 데 소요되는 시간을 단위 시간으로 하면 A와 B가 계단을 내려오는 속력은 각각

$\frac{24}{x-24}$, $\frac{16}{x-16}$이다.

이 두 사람의 속력의 비는 3 : 1이므로

$\frac{24}{x-24}:\frac{16}{x-16}=3:1$, $\frac{24}{x-24}=\frac{48}{x-16}$

$24(x-16)=48(x-24)$, $x-16=2(x-24)$

$\therefore \boldsymbol{x=32}$

27 (1) C의 부분에서 세로의 개수가 x, 가로의 개수가 $x+11$이므로 B의 색종이의 개수는

$2x+2(x+11)+4=\boldsymbol{4x+26}$

(2) A의 부분에서 색종이의 개수는

$2(x+2)+2(x+13)+4=4x+34$

$\therefore \mathrm{C+B+A}=x(x+11)+(4x+26)+(4x+34)$

$=390$

$x^2+19x-330=0$, $(x+30)(x-11)=0$

$\therefore \boldsymbol{x=11}$ ($\because x>0$)

(3) 하얀색 색종이가 붙어 있는 부분은 A와 C이므로 전체 색종이의 개수에서 B 부분의 색종이의 개수를 빼면 된다.

$\therefore 390-(4x+26)=390-70=\boldsymbol{320}$**(장)**

28 작은 직사각형 한 개의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=5x$, $\overline{\mathrm{BC}}=4y$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$5x=4y$, $y=\frac{5}{4}x$ ······㉠

또한, 카드 한 장의 넓이는 xy이므로 카드 9장의 넓이의 합은 $9xy$이다.

$\therefore 9xy=720$, $xy=80$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

$x=8(\mathrm{cm})$, $y=10(\mathrm{cm})$ ($\because x>0, y>0$)

따라서, 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}})=2(y+x+5x)=2(6x+y)$

$=2(6\times8+10)=\boldsymbol{116(\mathrm{cm})}$

29 두 그래프의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha, 3\alpha+b)$, $\mathrm{Q}(\beta, 3\beta+b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(3\beta+b-3\alpha-b)^2}$

$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(3\beta-3\alpha)^2}=\sqrt{10(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{10(\alpha+\beta)^2-40\alpha\beta}=4\sqrt{10}$

$10(\alpha+\beta)^2-40\alpha\beta=160$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ ······㉠

또한, α, β는 $x^2+ax+4=3x+b$, 즉

$x^2+(a-3)x+4-b=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=-a+3$, $\alpha\beta=4-b$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(-a+3)^2-4(4-b)=16$, $4b=-(a-3)^2+32$

$\therefore b=-\frac{1}{4}(a-3)^2+8$

따라서, $a=3$일 때 b의 최대값은 8이다.

30 직선 $mx-4y-13=0$, 즉 $y=\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}$이

$y=x^2-4x+3$과 한 점 P에서 만나므로 이차방정식

$\frac{m}{4}x-\frac{13}{4}=x^2-4x+3$의 판별식 $D=0$이다.

$4x^2-(m+16)x+25=0$

$D=(m+16)^2-4\times4\times25=0$에서 $m=4$ ($\because m>0$)

$4x^2-20x+25=0$에서 $(2x-5)^2=0$이므로

$x=\frac{5}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$ $\quad\therefore \mathrm{P}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

직선 $4x-4y-13=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$4(x-1)-4(y+1)-13=0$, $y=x-\frac{21}{4}$

직선 $y=x-\frac{21}{4}$과 직선 $y=ax-\frac{1}{4}$이 수직이므로

$1\times a=-1$ $\quad\therefore a=-1$

직선 $y=x-\frac{21}{4}$과 $y=-x-\frac{1}{4}$이 한 점 Q에서 만나므로

두 식을 연립하면 $x=\frac{5}{2}$, $y=-\frac{11}{4}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\left|-\frac{11}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right|=\boldsymbol{2}$

참고

두 직선의 위치 관계

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에서

① 평행 : $m=m'$, $n\neq n'$ ② 일치 : $m=m'$, $n=n'$

③ 수직 : $mm'=-1$ ④ 교차 : $m\neq m'$

31 세 개의 이차방정식의 근을 구하면

$x^2-(1+p)x+p=0$, $(x-1)(x-p)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=p$ ……㉠

$x^2-(q-1)x-q=0$, $(x+1)(x-q)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=q$ ……㉡

$x^2-2(p+2q)x+8pq=0$, $(x-2p)(x-4q)=0$

$\therefore x=2p$ 또는 $x=4q$ ……㉢

세 개의 이차방정식의 공통근이 음수이므로

㉠에서 공통근은 $x=p$

㉢에서 $2p\neq p$이므로 공통근은 $x=4q$

㉡에서 $q\neq 4q$이므로 공통근은 $x=-1$

$\therefore p=4q=-1$ $\quad\therefore p-4q=$**0**

32 $(a+b-c)(ab-bc+ca)+abc=2bc^2$를 전개하여 정리하면 $a^2b+a^2c+ab^2-b^2c-bc^2-ac^2=0$

$a^2b-bc^2+a^2c-ac^2+ab^2-b^2c=0$

$b(a^2-c^2)+ac(a-c)+b^2(a-c)=0$

$(a-c)\{b(a+c)+ac+b^2\}=0$

$(a-c)(ab+bc+ac+b^2)=0$

a, b, c는 삼각형의 변의 길이이므로 양수이다.

따라서, $a-c=0$이므로 **$a=c$인 이등변삼각형**이다.

33 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$m=f(9)+f(10)+f(11)+\cdots+f(48)$

$=(\sqrt{10}-\sqrt{9})+(\sqrt{11}-\sqrt{10})+(\sqrt{12}-\sqrt{11})+\cdots$

$+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=-\sqrt{9}+\sqrt{49}=-3+7=4$

$A\cap B=\{4\}$이므로 $n^2-4n+7=4$, $n^2-4n+3=0$

$(n-1)(n-3)=0$ $\quad\therefore n=1$ 또는 $n=3$

$n=1$일 때 $n+1=2$이므로 $A\cap B\neq\{4\}$ $\quad\therefore n=3$

따라서, 4와 3을 두 근으로 하는 이차방정식은

$\boldsymbol{x^2-7x+12=0}$

34 $36[x]$는 짝수, $36[x]+45$는 홀수이므로 $4x^2$은 홀수이어야 한다.

따라서, $4x^2=2m+1$이라 하면 $x=\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}$

(단, m은 음이 아닌 정수)

$4\left(\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}\right)^2-36\left[\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}\right]+45=0$

$(2m+1)-36\left[\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}\right]+45=0$

$36\left[\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}\right]=2m+46$, $\left[\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}\right]=\dfrac{m+23}{18}$

$\dfrac{m+23}{18}\leq\dfrac{\sqrt{2m+1}}{2}<\dfrac{m+23}{18}+1=\dfrac{m+41}{18}$

$\underbrace{\dfrac{m+23}{9}\leq\sqrt{2m+1}}_{(\text{i})}<\dfrac{m+41}{9}$ (ii)

(i)에서 $m+23\leq 9\sqrt{2m+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+46m+23^2\leq 81(2m+1)$

$m^2-116m+23^2\leq 9^2$

$m^2-116m+58^2\leq 9^2+58^2-23^2$

$=9^2+(58+23)(58-23)$

$=9^2+81\times 35$

$=9^2(1+35)$

$=9^2\times 6^2=54^2$

$(m-58)^2\leq 54^2$, $(m-58)^2-54^2\leq 0$

$(m-58+54)(m-58-54)\leq 0$

$(m-4)(m-112)\leq 0$

$\therefore 4\leq m\leq 112$

(ii)에서 $9\sqrt{2m+1}<m+41$

양변을 제곱하면

$81(2m+1)<m^2+82m+1681$

$m^2-80m+1600>0$, $(m-40)^2>0$

$\therefore m\neq 40$

(i), (ii)에서 $4\leq m<40$, $40<m\leq 112$

이 중에서 $\dfrac{m+23}{18}$이 정수인 것은

$m=13, 31, 49, 67, 85, 103$일 때이다.

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{27}}{2}, \dfrac{\sqrt{63}}{2}, \dfrac{\sqrt{99}}{2}, \dfrac{\sqrt{135}}{2}, \dfrac{\sqrt{171}}{2}, \dfrac{\sqrt{207}}{2}$

따라서, 실수 x의 개수는 **6**개이다.

참고

이차부등식의 풀이

① $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

② $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$

(단, $\alpha<\beta$)

35 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β(α, β는 자연수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ ……㉠

$\alpha\beta=2-a$ ……㉡

㉠－㉡을 하면

$\alpha\beta-\alpha-\beta=2$, $\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=2+1$

$(\alpha-1)(\beta-1)=3$ ……㉢

α, β가 자연수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$은 0 또는 자연수이다.
따라서, ㉢을 만족하는 경우는
$\begin{cases}\alpha-1=1\\ \beta-1=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha-1=3\\ \beta-1=1\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$
따라서, $a=-(\alpha+\beta)$이므로 $a=\mathbf{-6}$

36 $\frac{a}{2b-c}=\frac{2b}{3a+c}=\frac{a}{b}=k(k>0)$라 하면
$a=k(2b-c)$, $2b=k(3a+c)$
두 식을 더하면 $a+2b=k(3a+2b)$
양변을 b로 나누면 $\frac{a}{b}+2=k\left(\frac{3a}{b}+2\right)$
$\frac{a}{b}=k$이므로 $k+2=k(3k+2)$
$3k^2+k-2=0$, $(k+1)(3k-2)=0$
$\therefore k=\frac{a}{b}=\mathbf{\frac{2}{3}}$ $(\because k>0)$

37 댐의 저수량을 x, 하루의 유입량을 y, 하루의 배수량을 z라 하고 원래의 배수량대로 물을 배수할 때 댐의 물을 t일 동안 쓸 수 있다고 하자.
(저수량)+(유입량)=(배수량)이므로
$x+40y=40z$ ……㉠
$x+40(1+0.2)y=40(1+0.1)z$ ……㉡
$x+(1+0.2)yt=zt$ ……㉢
㉡−㉠에서 $z=2y$ ……㉣
㉣을 ㉠에 대입하면 $x=40y$ ……㉤
㉣, ㉤을 ㉢에 대입하면 $40y+1.2yt=2yt$
$40y=0.8yt$ $\therefore t=50$
따라서, 댐의 물을 **50일** 동안 쓸 수 있다.

38 주어진 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 주어진 방정식에 대입한 후 정리하면
$m^2+2m+1=0$, $(m+1)^2=0$ $\therefore m=-1$
따라서, $m=-1$을 주어진 방정식에 대입한 후 정리하면
$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서, 다른 한 근은 **1**이다.

39 정의에 따라서 주어진 식을 전개한다.
$(2x-1)^2-(2x-1)x+x^2=2-x$
$3x^2-2x-1=0$, $(3x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=\mathbf{-\frac{1}{3}}$ $(\because x<0)$

40 세 자연수 a, b, c 중 어느 두 수가 홀수이므로 b 또는 c 중 어느 하나는 홀수이다.
그러므로 $b-1$ 또는 $c-1$ 중 어느 하나는 짝수이고, 따라서 $(b-1)^2(c-1)^3$은 항상 짝수이다.
그런데 3^a은 항상 홀수이므로 $3^a+(b-1)^2(c-1)^3$은 **항상 홀수이다.**

41 ㉠을 인수분해하면 $(2x-y)(x-y)=0$
$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$
(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면
$5x^2-(2x)^2=16$, $x^2=16$
$\therefore x=\pm4$, $y=\pm8$ (복부호동순)
(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면
$5x^2-x^2=16$, $x^2=4$
$\therefore x=\pm2$, $y=\pm2$ (복부호동순)
(i), (ii)에서 $a=64$, $b=256$
$\therefore a+b=\mathbf{320}$

42 ㄱ. 이차방정식이 중근을 가질 때에는 계수가 허수일지라도 $D=0$은 성립한다.
ㄴ. 이차방정식의 판별식은 계수가 실수일 때 한하여 의미가 있다.
ㄷ, ㄹ 이차방정식의 근과 계수의 관계는 계수가 허수라도 이용할 수 있다.
따라서, 옳은 것은 **ㄱ, ㄷ, ㄹ**이다.

43 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2+\alpha-1=0$, $\alpha^2+\alpha=1$
$\alpha^2=1-\alpha$ ……㉠
$\beta^2+\beta-1=0$, $\beta^2+\beta=1$
$\beta^2=1-\beta$ ……㉡
또한, 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$
$\alpha^3=\alpha\times\alpha^2=\alpha(1-\alpha)=\alpha-\alpha^2$
$=\alpha-(1-\alpha)=2\alpha-1$ ……㉢
같은 방법으로 $\beta^3=2\beta-1$ ……㉣
$(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta+\beta^2+\beta^3)$
$=(1+1+2\alpha-1)(1+1+2\beta-1)$ ($\because$ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣)
$=(2\alpha+1)(2\beta+1)$
$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$=-4-2+1=\mathbf{-5}$

44 $2(x+y)^2=8xy-3x+3y+2$에서
$2x^2+2y^2-4xy+3x-3y-2=0$
$2(x^2+y^2-2xy)+3(x-y)-2=0$
$2(x-y)^2+3(x-y)-2=0$
$x-y=t$라 하면 $2t^2+3t-2=0$
$(t+2)(2t-1)=0$
$\therefore t=-2$ 또는 $t=\frac{1}{2}$
$\therefore t=x-y=\mathbf{-2}$ ($\because x<y$)

45 $x^2-ax+b+1=0$이 실근을 가지므로
$D=a^2-4(b+1)\geq 0$
$-1\leq a\leq 2$이므로 $0\leq a^2\leq 4$
(i) $a^2=0$일 때, $-4(b+1)\geq 0$, $b\leq -1$
따라서, b의 최대값은 -1이다.
(ii) $a^2=4$일 때, $-4b\geq 0$, $b\leq 0$
따라서, b의 최대값은 0이다.
$\therefore -1\leq M\leq 0$ $\quad\therefore p+q=\mathbf{-1}$

46 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면
$a:b=(a+b):a$
$a^2=b(a+b)$, $a^2-ab-b^2=0$
$1-\frac{b}{a}-\left(\frac{b}{a}\right)^2=0$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)-1=0$
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
그런데 $\frac{b}{a}>0$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\therefore a:b=\mathbf{2:-1+\sqrt{5}}$

다른풀이
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면
$a:b=(a+b):a$
$a^2=b(a+b)$, $a^2-ab-b^2=0$
$\therefore a=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4b^2}}{2}=\frac{b\pm\sqrt{5}b}{2}$
그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{b+\sqrt{5}b}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$
$\therefore a:b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b:b=\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1=1+\sqrt{5}:2}$

47 주어진 식을 인수분해하면
$a^3c-a^2bc+ac(b^2+c^2)-bc(b^2+c^2)$
$=a^2c(a-b)+c(b^2+c^2)(a-b)$
$=c(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$
$c>0$, $a^2+b^2+c^2>0$이므로 $a-b=0$, 즉 $a=b$가 되어
$a=b$인 이등변삼각형이다.

특목고 구술·면접 대비 문제

P. 68~69

1 (1) 풀이 참조 (2) -1, $-\frac{1}{2}$, 0, 1 **2** $\frac{7}{36}$
3 9쪽, 10쪽 **4** (1) 풀이 참조
(2) 풀이 참조 (3) $a=6+5\sqrt{3}$, $b=-4$

1 (1) 주어진 이차방정식이 유리근 $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$ (p와 q, r와 s는 서로소)를 갖고
$P(x)=(a-3)x^2+(a-1)x+(a+1)$이라 하면
$P(x)=(a-3)x^2+(a-1)x+(a+1)$
$=(px-q)(rx-s)$
$=prx^2-(ps+qr)x+qs$
그런데 a가 짝수이면 $(a-3)$, $(a-1)$, $(a+1)$이 모두 홀수이므로 pr, $ps+qr$, qs가 모두 홀수가 되어야 한다.
pr, qs가 홀수이려면 p, q, r, s가 모두 홀수이어야 한다.
따라서, p, q, r, s가 모두 홀수이면 p와 q, r와 s가 서로소라는 조건에 위배된다.
따라서, a가 짝수이면 $P(x)=0$은 유리수를 근으로 갖지 않는다.
(2) $a=2k+1$(k는 정수)이라 하면
$P(x)=(2k-2)x^2+2kx+2k+2$
$=2\{(k-1)x^2+kx+(k+1)\}=0$
$D=k^2-4(k-1)(k+1)\geq 0$
$k^2-4k^2+4\geq 0$, $3k^2-4\leq 0$
$(\sqrt{3}k+2)(\sqrt{3}k-2)\leq 0$
$\therefore \frac{-2}{\sqrt{3}}\leq k\leq\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow -1.\times\times\times\leq k\leq 1.\times\times\times$
k는 정수이므로 $k=-1, 0, 1$
$k=1$일 때는 일차방정식이 되므로 $k=-1$ 또는 $k=0$일 때 유리근을 갖는다
(i) $k=-1$일 때 $a=-1$이므로
$-4x^2-2x=0$, $-2x(2x+1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $-\frac{1}{2}$
(ii) $k=0$일 때 $a=1$이므로
$-2x^2+2=0$, $x^2=1$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
(i), (ii)에서
$\mathbf{x=-1, -\frac{1}{2}, 0, 1}$

2 이차방정식의 정수근을 α, β라 하면
$x^2-ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$이고, a, b는 모두 주사위의 눈의 수이므로 1이상 6 이하의 자연수이다.
$a=1$일 때 b의 값은 존재하지 않음
$a=2$일 때 $b=1$이고,
$x^2-2x+1=(x-1)^2$
$a=3$일 때 $b=2$이고,
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
$a=4$일 때 $b=3$, 4이고,
$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, $x^2-4x-4=(x-2)^2$
$a=5$일 때 $b=4$, 6이고,
$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$,
$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$
$a=6$일 때 $b=5$이고,
$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$
그러므로 두 근이 모두 정수가 되는 순서쌍 (a, b)는
$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$
따라서, 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{7}{36}}$

3 n쪽의 책이라면 모든 쪽수의 합은
$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
만일 찢겨 나간 쪽수가 k와 $k+1$이었다면 남은 쪽수의 합이 1256이므로
$\frac{n(n+1)}{2}=1256+k+(k+1)$ ……㉠
$k\geq 1$이므로
$\frac{n(n+1)}{2}\geq 1256+1+2$에서 $n^2+n\geq 2518$
$\therefore n\geq 50$ ……㉡
$k\leq n$이므로
$\frac{n(n+1)}{2}\leq 1256+n+(n+1)$에서 $n^2-3n\leq 2514$
$\therefore n\leq 51$ ……㉢
㉡, ㉢에서 $n=50$, 51
(i) $n=50$일 때, ㉠에서 $\frac{50\times 51}{2}=1256+k+(k+1)$
$1275=1256+2k+1$에서 $k=9$, $k+1=10$
(ii) $n=51$일 때, ㉠에서 $\frac{51\times 52}{2}=1256+k+(k+1)$
$1326=1256+k+(k+1)$에서 $k=\frac{69}{2}$
그런데 쪽수는 자연수이므로 찢겨 없어진 쪽수는 **9쪽, 10쪽**이다.

4 (1) 공통근이 α이므로
$\alpha^2+a\alpha+b=0$ ……㉢
$\alpha^2+b\alpha+1=0$ ……㉣
㉣의 양변을 α로 나누면
$\alpha+b+\frac{1}{\alpha}=0$, $b=-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$ ……㉤
산술 · 기하평균에 의하여
$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2\sqrt{\alpha\times\frac{1}{\alpha}}=2$이므로 $b\leq -2$
㉤을 ㉢에 대입하면 $\alpha^2+a\alpha-\alpha-\frac{1}{\alpha}=0$
위의 식의 양변을 α로 나누면
$\alpha+a-1-\frac{1}{\alpha^2}=0$, $a=1-\alpha+\frac{1}{\alpha^2}$ ……㉥
$\therefore a\geq 1$
(2) ㉠의 두 근을 α, β, ㉡의 두 근을 α, γ라 하면
㉠에서 $\alpha\beta=b$이고 이것을 ㉤에 대입하면
$\alpha\beta=-\alpha-\frac{1}{\alpha}$
위의 식의 양변을 α로 나누면 $\beta=-\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$
㉡에서 $\alpha\gamma=1$ $\quad\therefore \boldsymbol{\gamma=\frac{1}{\alpha}}$
(i) $0<\alpha\leq 1$
(ii) $0<\alpha^2\leq 1$, $\frac{1}{\alpha^2}\geq 1$이므로 $\boldsymbol{\beta=-\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)}\leq -2$
(iii) $\frac{1}{\alpha}\geq 1$이므로 $\gamma=\frac{1}{\alpha}\geq 1$
(i)~(iii)에서 $\beta<\alpha\leq\gamma$
$\therefore \boldsymbol{-\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)<\alpha\leq\frac{1}{\alpha}}$
(3) $b\geq -4$, $\alpha>0$이므로 ㉣에서
$\alpha^2-4\alpha+1\leq 0$
위의 식의 양변을 α^2으로 나누면
$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-4\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1\leq 0$
$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-4\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$에서 $\frac{1}{\alpha}=2\pm\sqrt{3}$이므로
$2-\sqrt{3}\leq\frac{1}{\alpha}\leq 2+\sqrt{3}$
㉠, ㉡의 근 가운데 최대인 것이 $\frac{1}{\alpha}$이고 이것의 최대값은 $2+\sqrt{3}$이므로
$\boldsymbol{a}=1-\alpha+\frac{1}{\alpha^2}=1-(2+\sqrt{3})+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$
$=\mathbf{6+5\sqrt{3}}$
$\boldsymbol{b}=-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$
$=\mathbf{-4}$

참고

① $a=1-\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}$에서 $a\geqq1$인 이유

$1-\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}=1-\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

$=1-\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^2}$

$=1-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2}$

여기에서 $\alpha^2>0$, $\alpha^2+\alpha+1>0$이고,

$0<\alpha\leqq1$에서 $-1<\alpha-1\leqq0$, $0\leqq-(\alpha-1)<1$이므로

$1-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2}=1-\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}=a\geqq1$

② $b\geqq-4$, $\alpha>0$에서 $\alpha^2-4\alpha+1\leqq0$인 이유

$b=-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\geqq-4$에서 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leqq4$

양변에 $\alpha(\alpha>0)$를 곱하면

$\alpha^2+1\leqq4\alpha \quad \therefore \alpha^2-4\alpha+1\leqq0$

시·도 경시 대비 문제

P. 70~73

1 풀이 참조 **2** 1 **3** 풀이 참조
4 풀이 참조 **5** $x=-p$ 또는 $x=-q$
6 $x=0$ 또는 $x=1$ **7** $-6:-1:6$
8 $x=y=z=1$ **9** $-2, -1, 1, 2$ **10** ②
11 2006 **12** 9쌍

1 (i) $x=2n$(n은 정수)을 해로 갖는다고 하면

$a(2n)^2+b(2n)+c=4an^2+2bn+c$

$=2(2an^2+bn)+c=0$

$\therefore c=-2(2an^2+bn)$

그런데 c는 짝수가 되어 가정에 모순이므로 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 a, b, c가 모두 홀수이면 정수해를 갖지 않는다.

(ii) $x=2n+1$(n은 정수)을 해로 갖는다고 하면

$a(2n+1)^2+b(2n+1)+c$

$=2(2an^2+2an+bn)+a+b+c=0$

$\therefore a+b+c=-2(2an^2+2an+bn)$

그러므로 $a+b+c$는 짝수이다.

그러므로 a, b, c는 모두 홀수라는 가정에 모순이므로 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 a, b, c가 모두 홀수이면 정수해를 갖지 않는다.

2 $y=f(x-1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이고, $y=f(x+1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 그래프이다.

따라서, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이면 방정식 $f(x-1)=0$의 두 근은 $\alpha+1$, $\beta+1$이고, 방정식 $f(x+1)=0$의 두 근은 $\alpha-1$, $\beta-1$이다.

즉, $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{\alpha+1, \beta+1\}$, $C=\{\alpha-1, \beta-1\}$이고, 조건에 의하여 $A\subset(B\cup C)$이 성립되어야 하므로

$\alpha\in(B\cup C)$, $\beta\in(B\cup C)$

$\alpha\neq\alpha+1$, $\alpha\neq\alpha-1$이고, 또한 $\alpha<\beta$이므로

$\alpha\neq\beta+1$이다.

마찬가지로 $\beta\neq\beta+1$, $\beta\neq\beta-1$이고, 또한 $\alpha<\beta$이므로

$\beta\neq\alpha-1$이다.

따라서, $\alpha=\beta-1$이고 $\beta=\alpha+1$이다.

$\therefore \boldsymbol{\beta-\alpha=1}$

3 $f(x)=x^2+px+q$, $g(x)=x^2+px+q+k(2x+p)$라 하면 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=p^2-4q>0$

$f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 x_1, x_2라 하면

$x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$

$g(x)=x^2+(p+2k)x+(q+kp)=0$의 판별식 D'는

$D'=(p+2k)^2-4(q+kp)$

$=p^2+4k^2-4q>0$ ($\because p^2-4q>0$)

따라서, 방정식 $g(x)=0$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한, $x^2+px+q=0$이므로

$g(x_1)=k(2x_1+p)$, $g(x_2)=k(2x_2+p)$

$g(x_1)\times g(x_2)=k^2\{4x_1x_2+2p(x_1+x_2)+p^2\}$

$=k^2(4q-2p^2+p^2)$

$=-k^2(p^2-4q)<0$ ($\because p^2-4q>0$)

따라서, 이차방정식 $g(x)=0$의 한 근이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 x_1, x_2 사이에 있다.

참고

이차방정식 $g(x)=0$의 한 근이 두 수 x_1과 x_2 사이에 있을 경우

$g(x_1)\times g(x_2)<0$

4 $a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc=0$의 좌변을 인수분해하면

$a^2-16b^2-c^2+6ab+10bc$

$=(a^2+6ab+9b^2)-(25b^2-10bc+c^2)$

$=(a+3b)^2-(5b-c)^2$

$=\{(a+3b)+(5b-c)\}\{(a+3b)-(5b-c)\}$

$=(a-2b+c)(a+8b-c)=0$

a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+8b>a+b>c$

따라서, $a+8b-c>0$이므로 $a-2b+c=0$

$\therefore a+c=2b$

5 방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면

$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$

이 방정식의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-(p+q)$, $\alpha\beta=pq-k$ ……㉠

방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$

$\therefore x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉠)

$(x+p)(x+q)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-p}$ **또는** $\boldsymbol{x=-q}$

6 $f(x)=0$이면 $f(x^2)=0$, $f(x^4)=0$이 된다. 이 방정식의 해는 많아야 2개이므로 x, x^2, x^4 중 어느 2개는 같아야한다.

(i) $x=x^2$에서 $x(x-1)=0$ $\therefore x=0, 1$

(ii) $x^2=x^4$에서 $x^2(x^2-1)=0$ $\therefore x=-1, 0, 1$

(iii) $x^4=x$에서 $x(x^3-1)=0$ $\therefore x=0, 1$

(i)~(iii)에서 $x=-1, 0, 1$

$f(k^2)+f(k)f(k+1)=0$에

$k=0$을 대입하면 $f(0)+f(0)f(1)=0$ ……㉠

$f(0)\{1+f(1)\}=0$ $\therefore f(0)=0$ 또는 $f(1)=-1$

$k=1$을 대입하면 $f(1)+f(1)f(2)=0$

$f(1)\{1+f(2)\}=0$ $\therefore f(1)=0$ 또는 $f(2)=-1$

$k=-1$을 대입하면 $f(1)+f(-1)f(0)=0$

여기에서 $f(-1)=0$이면 $f(1)=0$인데 이것은 ㉠에 의하여 $f(0)=0$이 되므로 모순이다. 왜냐하면 이차방정식이 -1, 0, 1의 3개의 근을 가질 수 없기 때문이다.

따라서, $f(x)=0$의 두 근은 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$이다.

참고

$f(x)=ax(x-1)$이라 하면 $f(x^2)+f(x)f(x+1)$이므로

$ax^2(x^2-1)+ax(x-1)\cdot a(x+1)x$

$=ax^2(x^2-1)+a^2x^2(x^2-1)=ax^2(x^2-1)(1+a)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a\neq0$)

따라서, $f(x)=-x(x-1)$이므로 $x=0$, 1이다.

$f(x^2)+f(x)f(x+1)=-x^2(x^2-1)+x(x-1)(x+1)x$

$=-x^2(x^2-1)+x^2(x^2-1)=0$

이고 이 조건을 만족시키는 근은 0, 1 뿐이다.

7 $f(x)=a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)$
$+c(x+3)(x+1)$

이라 하면 $x=0$, 1이 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$f(0)=2a+6b+3c=0$ ……㉠

$f(1)=6a+12b+8c=0$ ……㉡

㉡$\div2-$㉠을 하면 $a+c=0$

$\therefore a=-c$

$a=-c$를 ㉠에 대입하면 $6b+c=0$

$\therefore b=-\frac{1}{6}c$

$\therefore a:b:c=-c:-\frac{c}{6}:c=\boldsymbol{-6:-1:6}$

8 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$에서

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ ……㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$
$=0$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

x, y, z가 실수이므로

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$

$\therefore x=y=z$

$\therefore x+y^2+z^3=x+x^2+x^3=3$

$x^3+x^2+x-3=0$에서 $x=1$이면 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x$는 실수)

$\therefore \boldsymbol{x=y=z=1}$

9 a, b가 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로

$a+b=1$, $ab=1$

$a^2-a+1=0$, $b^2-b+1=0$

$a\neq-1$이므로 $a^2-a+1=0$의 양변에 $(a+1)$을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0$, $a^3+1=0$ $\therefore a^3=-1$

같은 방법으로 $b^3=-1$

$f(n)=a^n+b^n$에서

(i) $n=3k$($k\geq0$인 정수)

$f(3k)=a^{3k}+b^{3k}=(a^3)^k+(b^3)^k$

$=(-1)^k+(-1)^k=2(-1)^k$

따라서, k가 짝수이면 2, k가 홀수이면 -2이다.

(ii) $n=3k+1$($k\geq0$인 정수)

$f(3k+1)=a^{3k+1}+b^{3k+1}=a(a^3)^k+b(b^3)^k$

$=a(-1)^k+b(-1)^k$

$=(a+b)(-1)^k=(-1)^k$ ($\because a+b=1$)

따라서, k가 짝수이면 1, k가 홀수이면 -1이다.

(iii) $n=3k+2$($k\geq0$인 정수)

$f(3k+2)=a^{3k+2}+b^{3k+2}=a^2(a^3)^k+b^2(b^3)^k$

$=(a^2+b^2)(-1)^k$

$=\{(a+b)^2-2ab\}(-1)^k=(-1)^{k+1}$

따라서, k가 짝수이면 -1, k가 홀수이면 1이다.
(i)~(iii)에서 $f(n)$의 값으로 가능한 것은 $\mathbf{-2, -1, 1, 2}$이다.

10 주어진 이차방정식이 실근을 갖지 않으므로

$D=b^2-4ac<0$에서 $b^2<4ac$ ······㉠

$b^2\geq 0$이므로 $ac>0$

$c<0$이므로 $a<0$

$(a-c)^2=(a+c)^2-4ac\geq 0$

$(a+c)^2\geq 4ac$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $b^2<4ac\leq(a+c)^2$이므로 $|b|<|a+c|$

그런데 $a<0$, $c<0$이므로 $b\leq|b|<-a-c$

$\therefore a+b+c<\mathbf{0}$

11 $(2006x)^2-2005\times 2007x-1=0$ ······㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$2006^2-1-2005\times 2007$

$=(2006-1)(2006+1)-2005\times 2007$

$=0$

따라서, ㉠의 한 근을 1, 다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$1\times\alpha=\dfrac{-1}{2006^2}$ $\quad\therefore \alpha=a=-\dfrac{1}{2006^2}$

$x^2+2005x-2006=0$ ······㉡

$(x+2006)(x-1)=0$

$\therefore x=-2006$ 또는 $x=1$

$\therefore b=-2006$

$ab=\left(-\dfrac{1}{2006^2}\right)\times(-2006)=\dfrac{1}{2006}$

$\therefore \dfrac{1}{ab}=\mathbf{2006}$

12 $x=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4x^2+4x+1=2$, $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$

$\therefore p=1$, $q=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore T=\left\{t\,\middle|\,-\dfrac{1}{4}\leq t\leq 1\text{인 정수}\right\}=\{0, 1\}$

(i) $A=\phi$일 때, $B=\phi$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$이므로 4쌍
(ii) $A=\{0\}$일 때, $B=\{0\}$, $\{0, 1\}$이므로 2쌍
(iii) $A=\{1\}$일 때, $B=\{1\}$, $\{0, 1\}$이므로 2쌍
(iv) $A=\{0, 1\}$일 때, $B=\{0, 1\}$이므로 1쌍
(i)~(iv)에서 $A\subset B\subset T$를 만족하는 집합 A, B는 모두 **9쌍**이다.

대비 문제

1 6 **2** $(x, y, z)=(0, 0, 0)$
3 $(n+1)(n-3)$ **4** 9

1 $x^2-1154x+1=0$의 두 근은

$x=577\pm\sqrt{577^2-1}$

$577^2-1=(577-1)(577+1)$

$=576\times 578$

$=(4\times 144)\times(2\times 289)$

$=(2\times 12)^2\times 2\times 17^2$

이므로 $x=577\pm 2\times 12\times 17\sqrt{2}$

또한, $577=289+288=17^2+2\times 12^2$이므로

$577\pm 2\times 12\times 17\sqrt{2}$

$=17^2+(12\sqrt{2})^2\pm 2\times 17\times 12\sqrt{2}$

$=(17\pm 12\sqrt{2})^2$

$=(17\pm 2\sqrt{72})^2$

$=(\sqrt{9}\pm\sqrt{8})^4$

$=(3\pm 2\sqrt{2})^4$

$\alpha=(3+2\sqrt{2})^4$, $\beta=(3-2\sqrt{2})^4$이라 하면

$\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=\mathbf{6}$

다른풀이

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1154$, $\alpha\beta=1$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=1154+2=1156=34^2$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=34$ ($\because \sqrt{\alpha}>0$, $\sqrt{\beta}>0$)

$(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta})^2=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+2$, $(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta})^2=34+2=36$

$\therefore \sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=\mathbf{6}$ ($\because \sqrt[4]{\alpha}>0$, $\sqrt[4]{\beta}>0$)

2 주어진 방정식에서 x^3을 제외한 나머지 항은 2의 배수이므로 x는 2의 배수이어야 한다.

$x=2k$라 하면 $8k^3+2y^3+4z^3+16kyz=0$

$4k^3+y^3+2z^3+8kyz=0$

위의 식에서도 y^3을 제외한 나머지 항은 2의 배수이므로 y는 2의 배수이어야 한다.

$y=2m$이라 하면 $4k^3+8m^3+2z^3+16kmz=0$

$2k^3+4m^3+z^3+8kmz=0$

위의 식에서도 z^3을 제외한 나머지 항은 2의 배수이므로 z는 2의 배수이어야 한다.

$z=2p$라 하면 $2k^3+4m^3+8p^3+16kmp=0$

$k^3+2m^3+4p^3+8kmp=0$

이것은 처음 방정식과 같은 꼴의 식이 되므로 임의의 자연수 n에 대하여

$x=2^nk$, $y=2^nm$, $z=2^np$를 만족하고, 이것을 만족하는 해 (x, y, z)는 $\mathbf{(0, 0, 0)}$뿐이다.

3 쌍둥이 소수를 $6k-1$, $6k+1$이라고 하면

$n=(6k-1)(6k+1)$ ……㉠

n의 약수는 1, $6k-1$, $6k+1$, $36k^2-1$

$\therefore s(n)=1+(6k-1)+(6k+1)+(36k^2-1)$
$=36k^2+12k$

n과 서로소인 것들의 개수는

$36k^2-1$과 $6k-1$의 배수 $6k$개, $6k+1$의 배수 $6k-2$개, 즉 $1+6k+(6k-2)=12k-1$이므로

총 $12k-1$개를 제외한 수이다.

$\therefore p(n)=n-(12k-1)$

㉠에서 $n=36k^2-1$, $36k^2=n+1$

$6k=\sqrt{n+1}$, $12k=2\sqrt{n+1}$

$$\begin{aligned}\therefore s(n)p(n)&=(n+1+2\sqrt{n+1})(n+1-2\sqrt{n+1})\\&=(n+1)^2-(2\sqrt{n+1})^2\\&=n^2+2n+1-4n-4\\&=n^2-2n-3\\&=\boldsymbol{(n+1)(n-3)}\end{aligned}$$

4 조건 Ⅱ에서

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3=0$$

$x+y+z=3$이므로

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+x+y+z=0$$

$$x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x^2+y^2+z^2)=0$$

$xyz\neq0$이므로 $x^2+y^2+z^2\neq0$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=0$에서 $xyz\neq0$이므로

$xy+yz+zx=0$

$$\begin{aligned}\therefore x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=3^2-2\times0=\mathbf{9}\end{aligned}$$

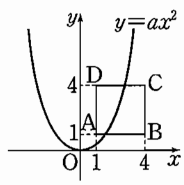
이차함수

특목고 대비 문제

P. 80~95

1 $\frac{1}{16}<a<4$ **2** 29 **3** $n=2$일 때 최소값 2
4 ② **5** -2 **6** -4 **7** $a<0$, $b>0$, $c>0$
8 ①, ④ **9** ③ **10** 128 **11** $-\frac{1}{2}$ **12** $(4, 8)$
13 ⑤ **14** $\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \frac{21-3\sqrt{33}}{8}\right)$ **15** 9
16 $\frac{10+\sqrt{6}}{2}$ **17** $-\frac{1}{2}$ **18** ④ **19** -12
20 $\frac{9}{4}$ **21** ② **22** 2 **23** $\frac{4}{25}\leq a\leq\frac{4}{9}$
24 1127 **25** 9 **26** 풀이 참조 **27** $-\frac{1}{5}$
28 풀이 참조 **29** $x=\pm\sqrt{2}$ **30** $-\frac{1}{11}$
31 15 cm **32** 3 **33** ⑤ **34** $\frac{9}{2}$ **35** $\frac{3}{4}\pi$
36 ③ **37** ② **38** 4 **39** 20 **40** 16
41 2, 8, 18 **42** 16 **43** 5 **44** 10036
45 $f(x)=\frac{x^2}{2006}$ 또는 $f(x)=\frac{(x-2006)^2}{2006}$
46 $\frac{13}{11}$ **47** 풀이 참조 **48** $\frac{2}{27}$

1 이차함수 $y=ax^2(a>0)$의 그래프가 정사각형 ABCD 둘레 위의 서로 다른 두 개의 점에서 만나려면 $y=ax^2$의 그래프가 점 B와 D 사이를 지나야 한다.



점 B$(4, 1)$을 지날 때는 $1=16a$이므로 $a=\frac{1}{16}$

또, 점 D$(1, 4)$를 지날 때는 $4=a$이므로 $a=4$

$\therefore$ $\boldsymbol{\frac{1}{16}<a<4}$

2 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프가 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 일치한다. 그러므로

$y+7=(x+5)^2$에서 $y=x^2+10x+18$

따라서, $a=1$, $b=10$, $c=18$이므로

$a+b+c=\mathbf{29}$

다른풀이

$y=ax^2+bx+c$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동하면

$y-7=a(x-5)^2+b(x-5)+c$

위의 식을 정리하면

$y=ax^2+(b-10a)x+25a-5b+c+7$

$\therefore a=1, b-10a=0, 25a-5b+c+7=0$

$a=1$이므로 $b=10a=10$

$c=5b-25a-7=50-25-7=18$

$\therefore a+b+c=$ **29**

3 $f(n)=2n^2-7n+8$

$=2\left(n^2-\frac{7}{2}n+\frac{49}{16}\right)-\frac{49}{8}+8$

$=2\left(n-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$

이차함수의 그래프는 대칭축에 대하여 좌우 대칭이므로 $n=\frac{7}{4}$에 가장 가까운 자연수 $\boldsymbol{n=2}$일 때 최소이며 그 때의 최소값은 $f(2)=8-14+8=$ **2**

4 $h=-5t^2+25t+20$

$=-5\left(t^2-5t+\frac{25}{4}\right)+\frac{125}{4}+20$

$=-5\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{205}{4}$

$t=\frac{5}{2}$(초)일 때, 최대값이 $\frac{205}{4}$m이므로

$a=\frac{5}{2}, b=\frac{205}{4}$

$\therefore a+b=\boldsymbol{\frac{215}{4}}$

5 $y=(a+x)^2+2(a+1)x+6$

$=a^2+2ax+x^2+2ax+2x+6$

$=x^2+2(2a+1)x+a^2+6$

$=\{x^2+2(2a+1)+(2a+1)^2\}-(2a+1)^2+a^2+6$

$=(x+2a+1)^2-3a^2-4a+5$

꼭지점의 좌표가 $(-2a-1, -3a^2-4a+5)$이므로

(i) $-2a-1=3 \quad \therefore a=-2$

(ii) $-3a^2-4a+5=1, 3a^2+4a-4=0$

$(a+2)(3a-2)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $a=$ **-2**

다른풀이

주어진 이차함수를 전개하면

$y=a^2+2ax+x^2+2ax+2x+6$

$=x^2+2(2a+1)x+a^2+6$ ……㉠

㉠의 꼭지점의 좌표가 $(3, 1)$이고, x^2의 계수가 1이므로 구하는 이차함수는

$y=1\cdot(x-3)^2+1=x^2-6x+10$ ……㉡

㉠=㉡이므로

(i) $2(2a+1)=-6$에서 $2a+1=-3 \quad \therefore a=-2$

(ii) $a^2+6=10$에서 $a^2=4 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서 $a=$ **-2**

6 주어진 이차함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$4k-2k-2a-bk+b=0, (2-b)k-2a+b=0$

k의 값에 관계없이 성립하므로

$2-b=0, -2a+b=0$

$\therefore a=1, b=2$

$\therefore y=kx^2-(k+1)x-2(k-1)$ ……㉠

㉠이 점 (m, n)을 지나므로

$n=km^2-(k+1)m-2(k-1)$

$km^2-km-m-2k+2-n=0$

$(m^2-m-2)k-m-n+2=0$

k의 값에 관계없이 성립하므로

(i) $m^2-m-2=0, (m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=2$

(ii) $-m-n+2=0, n=-m+2$

$\therefore n=3$ 또는 $n=0$

그런데 $(2, 0)$과 (m, n)은 서로 다른 점이므로

$m=-1, n=3$

$\therefore m-n=$ **-4**

다른풀이

$y=kx^2-(k+a)x-b(k-1)$을 k에 관하여 정리하면

$k(x^2-x-b)+b-ax-y=0$

위의 식은 k의 값에 관계없이 성립하므로

$x^2-x-b=0$ ……㉠

$b-ax-y=0$ ……㉡

㉠의 두 근이 $x=2$ 또는 $x=m$이므로 근과 계수의 관계에서

$2+m=1, 2m=-b$

$\therefore m=-1, b=2$

$b=2$를 ㉡에 대입하면 $ax+y=2$ ……㉢

㉢의 해가 $(2, 0)$이므로

$2a+0=2 \quad \therefore a=1$

따라서, $x+y=2$에 $x=m=-1, y=n$을 대입하면

$-1+n=2 \quad \therefore n=3$

$\therefore m-n=-1-3=$ **-4**

7 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

$x=0$일 때 $y=c$, 즉 그래프가 y축과 만나는 점이 원점보다 위에 있으므로 $c>0$

한편, $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$에서

대칭축이 $x=-\frac{b}{2a}$이므로 $-\frac{b}{2a}>0$

여기서 $a<0$이므로 $b>0$
$\therefore$ $\boldsymbol{a<0, b>0, c>0}$

8 ① $a>0$, $-\dfrac{b}{2a}>0$에서 $b<0$, $c<0$
② ①에서 $ab<0$, $c<0$이므로 $ab+c<0$
③ $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(1)=a+b+c<0$
④ $f(-1)=a-b+c=0$
⑤ 이차함수의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로
$b^2-4ac>0$

9 $a<0$, $b<0$, $c>0$이므로 $bc<0$, $ca<0$, $ab>0$
따라서, 이차함수 $y=bcx^2+cax+ab$의 그래프의 모양은 ③이다.

10 $x=4$일 때 $y=-2\times4^2=-32$이므로
$A(-4, -32)$, $B(4, -32)$
$\therefore$ $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times8\times32=\mathbf{128}$

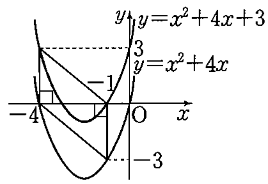
11 점 Q의 좌표를 $(m, 0)$이라 하면 점 P, R의 좌표는 각각
(m, m^2), (m, am^2)
$\overline{PQ}=m^2$, $\overline{QR}=-am^2$ ($\because$ $a<0$)이고,
$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$이므로
$m^2:(-am^2)=2:1$, $m^2=-2am^2$
$1=-2a$ ($\because$ $m\neq0$) $\quad$ $\therefore$ $a=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

12 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$$\triangle POA=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times y=\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{2}x^2=24$$
$\dfrac{3}{2}x^2=24$, $x^2=16$ $\quad$ $\therefore$ $x=\pm4$
그런데 점 P가 제 1사분면 위에 있으므로 $x>0$
따라서, 점 P의 좌표는 $\mathbf{(4, 8)}$

13
$$\begin{aligned}f(x)&=-2x^2-4mx+3m^2+10m\\&=-2(x^2+2mx+m^2)+2m^2+3m^2+10m\\&=-2(x+m)^2+5m^2+10m\end{aligned}$$
따라서, $f(x)$의 최대값 $g(m)=5m^2+10m$
$g(m)=5m^2+10m=5(m+1)^2-5$이므로
$g(m)$의 최소값은 $\mathbf{-5}$

14 두 점 A, B의 좌표는 $x^2=-2x+3$에서
$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=1$ $\quad$ $\therefore$ $A(-3, 9)$, $B(1, 1)$
점 P의 좌표를 (p, p^2)이라 하고 $\overline{AP}$를 지나는 직선의 식을 $y=mx+n$이라 하면 직선 AP의 기울기는
$$m=\frac{p^2-9}{p-(-3)}=\frac{(p+3)(p-3)}{p+3}=p-3\ (\because p>0)$$
$\therefore$ $y=(p-3)x+n$
점 $A(-3, 9)$를 위의 식에 대입하면
$9=-3p+9+n$ $\quad$ $\therefore$ $n=3p$
$\therefore$ $y=(p-3)x+3p$ $\quad$ $\therefore$ $D(0, 3p)$
$D(0, 3p)$, $O(0, 0)$, $P(p, p^2)$이므로
$\triangle DOP=\dfrac{1}{2}\times3p\times p=\dfrac{3}{2}p^2$
$A(-3, 9)$, $D(0, 3p)$, $C(0, 3)$이므로
$\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\times(3-3p)\times3=\dfrac{3}{2}(3-3p)$
$\triangle DOP=\dfrac{1}{2}\triangle ADC$이므로
$\dfrac{3}{2}p^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}(3-3p)$, $2p^2+3p-3=0$
$\therefore$ $p=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}$ ($\because$ $p>0$), $p^2=\dfrac{21-3\sqrt{33}}{8}$
따라서, 점 P의 좌표는 $\boldsymbol{\left(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}, \dfrac{21-3\sqrt{33}}{8}\right)}$

15 (ⅰ) $x^2+4x+3=0$에서
$(x+3)(x+1)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-1$
$\therefore$ $D(-1, 0)$, $C(-1, -3)$



(ⅱ) $x^2+4x=0$에서
$x(x+4)=0$ $\quad$ $\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=0$
$\therefore$ $B(-4, 0)$, $A(-4, 3)$
(ⅰ), (ⅱ)에서 □ABCD는 평행사변형이므로
□ABCD$=\overline{AB}\times\overline{BD}=3\times3=\mathbf{9}$

16 $y=ax^2+bx+c$가 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 6)$을 지나므로
$a-b+c=2$ $\quad$ ……㉠
$a+b+c=6$ $\quad$ ……㉡
㉡−㉠을 하면 $2b=4$ $\quad$ $\therefore$ $b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면
$a+c=4$ $\quad$ $\therefore$ $c=4-a$
$b=2$, $c=4-a$를 주어진 이차함수에 대입하면

$y=ax^2+bx+c=ax^2+2x+4-a$

$=a\left(x^2+\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a^2}\right)-\dfrac{1}{a}+4-a$

$=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}+4-a$

최대값이 $-3a$이므로 $a<0$이고,

$-\dfrac{1}{a}+4-a=-3a$

$2a^2+4a-1=0 \quad \therefore a=\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}$ ($\because a<0$)

$\therefore c=4-\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}=\mathbf{\dfrac{10+\sqrt{6}}{2}}$

17 $2a^2(t+1)x^2+(t^2+t-3a)x+(t^2-at+1)=0$

을 t에 관하여 정리하면

$(x+1)t^2+(2a^2x^2+x-a)t+(2a^2x^2-3ax+1)=0$

위의 식이 어떤 실수 t에 대해서도 성립하므로

$x+1=0,\ 2a^2x^2+x-a=0,\ 2a^2x^2-3ax+1=0$

$\therefore x=-1,\ 2a^2-a-1=0,\ 2a^2+3a+1=0$

(i) $2a^2-a-1=0$에서

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

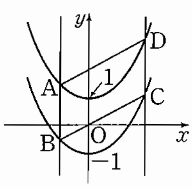
(ii) $2a^2+3a+1=0$에서

$(a+1)(2a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

18 문제에서 색칠한 부분의 넓이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.



$A\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$C(2,\ 1)$, $D(2,\ 3)$이고,

□ABCD는 평행사변형이므로

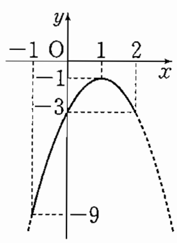
□ABCD$=\left\{\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\times\{2-(-1)\}=\mathbf{6}$

19 $y=-2x^2+4x+a$

$=-2(x^2-2x+1)+2+a$

$=-2(x-1)^2+2+a$

꼭지점이 $(1,\ 2+a)$이므로 꼭지점이 정의역에 포함된다. 따라서, $x=1$일 때, 최대값을 가지므로



$2+a=-1 \quad \therefore a=-3$

$x=-1$일 때, 최소값을 가지므로

$-8+2+a=b \quad \therefore b=-9$

$\therefore a+b=\mathbf{-12}$

20 $y=x^2-2ax+2a^2-a-1$

$=(x-a)^2+a^2-a-1$

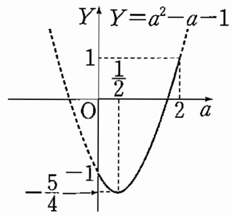
꼭지점의 좌표가

$(a,\ a^2-a-1)$이므로

$Y=a^2-a-1$

$=\left(a^2-a+\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{4}-1$

$=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$



Y의 꼭지점이 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$이므로 꼭지점이 $0\leq a\leq 2$의 범위에 있다.

따라서, $a=\dfrac{1}{2}$일 때 최소값이 $-\dfrac{5}{4}$이고, $a=2$일 때 최대값이 1이다.

$\therefore M=1,\ m=-\dfrac{5}{4} \quad \therefore M-m=\mathbf{\dfrac{9}{4}}$

21 $f(x)=-2x^2+4ax+a$

$=-2(x-a)^2+2a^2+a$

x의 값의 범위가 $0\leq x\leq 3$임에 주의하여 축 $x=a$를 좌우로 움직이며 최대값과 최소값을 구한다.

② $a>0$이라는 조건으로는 최대값을 정할 수 없다.

(i) $a<0$, $a<3$이면 최대값은 $f(3)$이다.

(ii) $a<0$, $a>3$이면 최대값은 $f(a)=2a^2+a$이다.

22 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프와 직선

$mx-4y-13=0$, 즉 $y=\dfrac{m}{4}x-\dfrac{13}{4}$이 한 점에서 만나므로 $x^2-4x+3=\dfrac{m}{4}x-\dfrac{13}{4}$이 중근을 갖는다.

$4x^2-(16+m)x+25=0$에서

$D=(16+m)^2-4\times4\times25=0$

$m^2+32m-144=0,\ (m+36)(m-4)=0$

$\therefore m=4$ ($\because m>0$)

$4x^2-20x+25=0,\ (2x-5)^2=0$

$\therefore x=\dfrac{5}{2},\ y=-\dfrac{3}{4}$

따라서, 교점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$4x-4y-13=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$4(x-1)-4(y+1)-13=0$에서

$4x-4y-21=0 \quad \therefore y=x-\dfrac{21}{4}$ ……㉠

㉠과 직선 $y=ax-\frac{1}{4}$이 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다. $\quad\therefore a=-1$

또한, $y=x-\frac{21}{4}$과 $y=-x-\frac{1}{4}$의 교점은

$x-\frac{21}{4}=-x-\frac{1}{4}$에서 $x=\frac{5}{2}$, $y=-\frac{11}{4}$

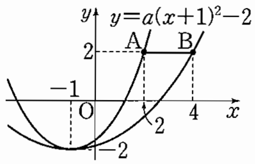
따라서, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\left|-\frac{11}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right|=\mathbf{2}$

23 $y=ax^2+2ax+a-2$

$=a(x^2+2x+1)-2$

$=a(x+1)^2-2$



(ⅰ) 이차함수의 그래프가 점 A$(2, 2)$를 지날 때,

$2=9a-2 \quad\therefore a=\frac{4}{9}$

(ⅱ) 이차함수의 그래프가 점 $(4, 2)$를 지날 때,

$2=25a-2 \quad\therefore a=\frac{4}{25}$

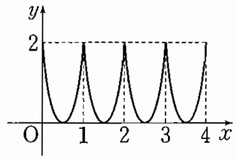
(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 값의 범위는

$\mathbf{\frac{4}{25}\le a\le\frac{4}{9}}$

24 $869-744=125$, $996-869=127$,
$1127-996=131$, $1256-1127=129$,
$1389-1256=133$, $1524-1389=135$,
$1661-1524=137$
이 중 일정한 값으로 증가하지 않는 **1127**이 잘못된 함수값이고 $996+129=1125$가 옳은 함수값이다.

25 $f(x+g(y))=ax+y+1$에 $y=0$을 대입하면
$f(x+1)=ax+1$ $(\because g(0)=1)$
$x+1=t$라 하면 $x=t-1$이므로
$f(t)=a(t-1)+1=at-a+1$
위의 식에 $t=0$을 대입하면 $f(0)=-a+1$
$f(0)=-2$이므로 $-a+1=-2 \quad\therefore a=3$
$\therefore f(t)=3t-2$, $f(x+g(y))=3x+y+1$
그러므로
$f(x+g(y))=3(x+g(y))-2=3x+y+1$에서
$g(y)=\frac{1}{3}y+1$
$\therefore f(3)+g(3)=(3\cdot3-2)+\left(\frac{1}{3}\cdot3+1\right)=\mathbf{9}$

26 Ⅱ에서



$f(x)=8x^2-8x+2$

$=8\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-2+2$

$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

Ⅰ에서

$f(x)=f(x-1)$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동해도 그 그래프는 같다.

참고

주기함수

함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 최소의 양수 p를 함수 $f(x)$의 주기라 한다.
위의 문제 Ⅰ에서 $f(x)=f(x-1)$이므로 주기는 1이다.

27 $f(x+2)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$에 $x=3$을 대입하면

$f(5)=\frac{f(3)-1}{f(3)+1}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$ $(\because f(3)=5)$

$x=5$를 대입하면 $f(7)=\frac{f(5)-1}{f(5)+1}=-\frac{1}{5}$,

$x=7$을 대입하면 $f(9)=\frac{f(7)-1}{f(7)+1}=-\frac{3}{2}$,

$x=9$를 대입하면 $f(11)=\frac{f(9)-1}{f(9)+1}=5, \cdots$

이와 같이 구하여 보면 다음과 같은 규칙이 있음을 알 수 있다.

$f(8k-5)=5$, $f(8k-3)=\frac{2}{3}$, $f(8k-1)=-\frac{1}{5}$,

$f(8k+1)=-\frac{3}{2}$ $(k=1, 2, 3, 4, \cdots)$

$\therefore f(2007)=f(8\times251-1)=\mathbf{-\frac{1}{5}}$

28 $h(x)=f(x)-x=x^2+(a-1)x+b$,
$f(x)=h(x)+x$라 하면 $g(x)-x$가 $h(x)$를 인수로 가진다는 사실을 보이면 된다.

$g(x)-x$
$=f(f(x))-x$
$=f(h(x)+x)-x$
$=\{h(x)+x\}^2+a\{h(x)+x\}+b-x$
$=\{h(x)\}^2+2xh(x)+x^2+ah(x)+ax+b-x$
$=\{h(x)\}^2+(2x+a)h(x)+x^2+(a-1)x+b$
$=\{h(x)\}^2+(2x+a)h(x)+h(x)$
$=h(x)\{h(x)+2x+a+1\}$

따라서, $g(x)-x$는 $f(x)-x$로 나누어 떨어진다.

29 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ $\cdots\cdots$㉠

㉠에 x 대신 $\dfrac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$ $\cdots\cdots$㉡

㉠−㉡×2를 하면

$-3f(x)=3x-\dfrac{6}{x}$ $\quad\therefore f(x)=\dfrac{2}{x}-x$

$f(x)=f(-x)$에서 $\dfrac{2}{x}-x=-\dfrac{2}{x}+x$

$2x=\dfrac{4}{x}$, $x^2=2$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}}$

30 $f(x+3)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$에 $x=10$을 대입하면

$f(13)=\dfrac{f(10)-1}{f(10)+1}=\dfrac{11-1}{11+1}=\dfrac{5}{6}$ $(\because f(10)=11)$

$x=13$을 대입하면 $f(16)=\dfrac{f(13)-1}{f(13)+1}=-\dfrac{1}{11}$,

$x=16$을 대입하면 $f(19)=\dfrac{f(16)-1}{f(16)+1}=-\dfrac{6}{5}$,

$x=19$를 대입하면 $f(22)=\dfrac{f(19)-1}{f(19)+1}=11$, $\cdots$

따라서, 다음과 같은 규칙이 있음을 알 수 있다.

$f(10)=f(22)=f(34)=\cdots=f(12k-2)=11$

$f(13)=f(25)=f(37)=\cdots=f(12k+1)=\dfrac{5}{6}$

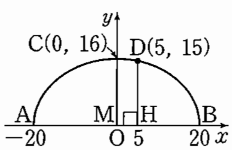
$f(16)=f(28)=f(40)=\cdots=f(12k+4)=-\dfrac{1}{11}$

$f(19)=f(31)=f(43)=\cdots=f(12k+7)=-\dfrac{6}{5}$

그런데 $2008=12\times167+4$이므로

$f(2008)=f(16)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{11}}$

31 점 M을 원점 O(0, 0)으로 하고 직선 AB를 x축, 직선 CM을 y축으로 하는 좌표평면을 그리면 네 점 A, B, C, H의 좌표는 각각 A(−20, 0), B(20, 0), C(0, 16), H(5, 0)이고, 꼭지점의 좌표가 C(0, 16)이므로 포물선의 방정식은



$y=ax^2+16$ $\cdots\cdots$㉠

㉠에 점 B(20, 0)을 대입하면

$0=a\cdot20^2+16$, $a=-\dfrac{1}{25}$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{25}x^2+16$

따라서, $\overline{\mathrm{DH}}$의 길이는 $x=5$일 때의 y의 값이므로

$y=-\dfrac{1}{25}\cdot5^2+16=15$ $\quad\therefore$ $\overline{\mathrm{DH}}=$**15 (cm)**

32 A(0, 9)이므로 점 D의 y좌표는 9이다.

$9=x^2$에서 $x=3$ $(\because x>0)$

따라서, 점 D의 x좌표는 3, 즉 D(3, 9)

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=3-0=3$

따라서, □ABCD는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로 점 G의 y좌표는 $9-3=6$이다.

$6=x^2$에서 $x=\sqrt{6}$ $(\because x>0)$

따라서, 점 G의 x좌표는 $\sqrt{6}$, 즉 G$(\sqrt{6}, 6)$

그러므로 정사각형 ABCD의 넓이는 $3^2=9$이고,

정사각형 BEFG의 넓이는 $(\sqrt{6})^2=6$이다.

따라서, 두 정사각형의 넓이의 차는 $9-6=$**3**

33 직선 $4x-3y-4=0$을 평행이동하여 포물선 $y=x^2$에 접하는 직선을 구한다.

구하는 직선을 $y=\dfrac{4}{3}x+k$라 하면 $x^2=\dfrac{4}{3}x+k$

$3x^2-4x-3k=0$에서 판별식 $D=0$

$\dfrac{D}{4}=4+9k=0$이므로 $k=-\dfrac{4}{9}$ $\quad\therefore y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{9}$

따라서, 직선 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{9}$ $\cdots\cdots$㉠

과 직선 $4x-3y-4=0$ $\cdots\cdots$㉡

까지의 거리가 수선의 길이의 최소값이다.

두 직선이 평행하므로 ㉠ 위의 한 점 $\left(0, -\dfrac{4}{9}\right)$에서

㉡까지의 거리를 d라 하면

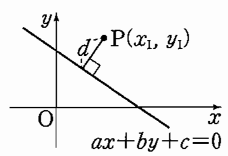
$$d=\frac{\left|4\cdot0+(-3)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)-4\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\frac{8}{3}}{5}=\boldsymbol{\frac{8}{15}}$$

참고

점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



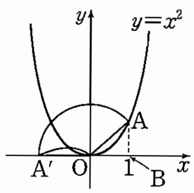
34 점 A의 좌표는 $\left(-3, \dfrac{9}{2}\right)$이고,

점 D의 좌표는 $\left(3, \dfrac{9}{2}\right)$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=6$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=2$

따라서, 점 C의 좌표는 $\left(1, \dfrac{9}{2}\right)$이고, 이 점은 $y=ax^2$의 그래프 위에 있으므로 $a=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

35 오른쪽 그림에서 곡면 OA의 넓이와 곡면 OA′의 넓이가 서로 같으므로 문제에서 색칠한 부분의 넓이는 오른쪽 그림에서 부채꼴 OAA′의 넓이와 같다.



$\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\angle AOA'=180^\circ-\angle AOB=135^\circ$이므로 부채꼴 OAA′의 넓이 S는

$S=\pi\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{135^\circ}{360^\circ}=\mathbf{\dfrac{3}{4}\pi}$

36 $\triangle AOB$와 $\triangle APB$의 넓이가 같으려면 두 삼각형의 밑변의 길이가 같으므로 직선 AB와 직선 OP는 평행해야 한다.

따라서, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선 OP의 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$

따라서, 점 P의 좌표는 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$의 교점이다.

$x^2=\dfrac{1}{2}x$에서 $2x^2-x=0$, $x(2x-1)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ $(\because x\neq0)$, $y=\dfrac{1}{4}$

따라서, 점 P의 좌표는 $\mathbf{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)}$

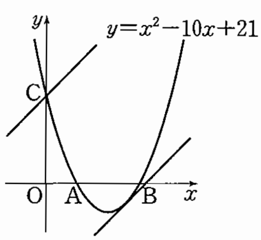
37 $f(n)$과 $g(n)$이 동시에 0일 때만 $h(n)=1$이고, 주어진 식에서 n의 값은 3의 배수이므로 주어진 식의 값은 n이 3과 5와 7의 공배수, 즉 105의 배수일 때만 $h(n)=1$이 된다.

따라서, 1에서 2007까지의 105의 배수의 개수는 19이므로

$h(3)+h(6)+h(9)+\cdots+h(2004)+h(2007)=\mathbf{19}$

38 $2x-y+5=k$라 하면

$y=2x+5-k$ ……㉠



(i) ㉠이 점 C(0, 21)을 지날 때 k는 최소값을 가진다.

$21=5-k$

$\therefore k=-16$

(ii) ㉠이 이차함수의 그래프에 접할 때 최대값을 가진다.

$x^2-10x+21=2x+5-k$, $x^2-12x+16+k=0$

$\dfrac{D}{4}=36-16-k=0$ $\quad\therefore k=20$

(i), (ii)에서 (최대값)+(최소값)$=20+(-16)=\mathbf{4}$

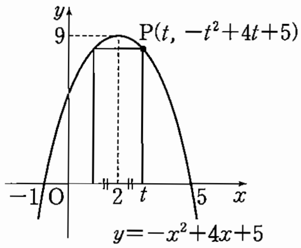
39 $y=-x^2+4x+5$

$=-(x^2-4x+4)+4+5$

$=-(x-2)^2+9$

이므로 꼭지점의 좌표는 (2, 9)

$y=-x^2+4x+5$의 그래프 위에 임의의 한 점 P를 잡으면 $P(t, -t^2+4t+5)$



오른쪽 그림에서 $y=-x^2+4x+5$의 그래프는 $x=2$에 대하여 좌우대칭이므로 직사각형의 가로의 길이는 $2(t-2)$이고, 세로의 길이는 $-t^2+4t+5$이다. 따라서, 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{2(t-2)+(-t^2+4t+5)\}$

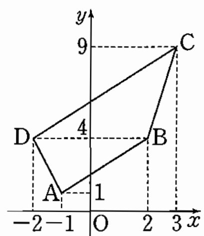
$=2(-t^2+6t+1)$

$=-2(t^2-6t+9)+18+2$

$=-2(t-3)^2+20$

따라서, $t=3$일 때 직사각형의 둘레의 길이의 최대값은 **20**이다.

40 ㉠, ㉡에서



$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore A(-1, 1), B(2, 4)$

㉠, ㉢에서

$x^2=x+6$, $x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$ $\quad\therefore x=3$ 또는 $x=-2$

$\therefore C(3, 9), D(-2, 4)$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times5=\mathbf{16}$

41 $y=\dfrac{1}{2}x^2-k$에서 $y=0$일 때, $0=\dfrac{1}{2}x^2-k$

$\therefore x=\pm\sqrt{2k}$ $\quad\therefore A(-\sqrt{2k}, 0), B(\sqrt{2k}, 0)$

따라서, $\overline{AB}=2\sqrt{2k}$이고, $\overline{AB}$의 길이가 정수이므로 $2\sqrt{2k}$가 정수가 되어야 한다.

즉, $k=2\times m^2$ (m은 자연수)의 꼴이어야 한다.

그런데 $0<k<20$, $0<2k<40$, $0<\sqrt{2k}<\sqrt{40}$

$\therefore 0<2\sqrt{2k}=\overline{AB}<\sqrt{160}=12.\times\times\times$

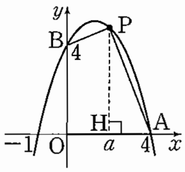
(i) $k=2\times1^2$이면 $\overline{AB}=4$

(ii) $k=2\times2^2$이면 $\overline{AB}=8$

(iii) $k=2\times3^2$이면 $\overline{AB}=12$

(i)~(iii)에서 $k=\mathbf{2, 8, 18}$

42 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3a+4)$ 라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(a, 0)$이라 하면 $\square\mathrm{OAPB}$의 넓이는 사다리꼴 OHPB와 $\triangle\mathrm{HAP}$의 넓이의 합과 같다.



$\therefore \square\mathrm{OAPB}=\square\mathrm{OHPB}+\triangle\mathrm{HAP}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\{4+(-a^2+3a+4)\}\cdot a$$

$$+\frac{1}{2}\cdot(4-a)\cdot(-a^2+3a+4)$$

$$=-2a^2+8a+8$$

$$=-2(a-2)^2+16$$

따라서, $a=2$일 때 $\square\mathrm{OAPB}$의 넓이의 최대값은 **16** 이다.

43 주어진 함수의 조건에 의하여 $x_1, x_2, x_3, \cdots$을 차례로 대입하면

$f(x_1)=x_2=1000,$

$f(x_2)=f(1000)=x_3=\frac{1000}{5}=200,$

$f(x_3)=f(200)=x_4=\frac{200}{5}=40,$

$f(x_4)=f(40)=x_5=\frac{40}{5}=8,$

$f(x_5)=f(8)=x_6=8+1=9,$

$f(x_6)=f(9)=x_7=9+1=10,$

$f(x_7)=f(10)=x_8=\frac{10}{5}=2,$

$f(x_8)=f(2)=x_9=2+1=3,$

$f(x_9)=f(3)=x_{10}=3+1=4,$

$f(x_{10})=f(4)=x_{11}=4+1=5,$

$f(x_{11})=f(5)=x_{12}=\frac{5}{5}=1, \cdots$의 꼴이므로

$f(x_{5k})=5,\ f(x_{5k+1})=1,\ f(x_{5k+2})=2,\ f(x_{5k+3})=3,$
$f(x_{5k+4})=4$ (단, $k\geq2$)

$\therefore f(x_{50})=f(x_{5\times10})=\mathbf{5}$

44 $f(8)=8-10\cdot\left[\frac{8}{10}\right]=8-10\times0=8$

$f(79)=79-10\cdot\left[\frac{79}{10}\right]=79-10\times7=9$

$f(125)=125-10\cdot\left[\frac{125}{10}\right]=125-10\times12=5$

즉, 함수 $f(x)$는 'x의 일의 자리 수'로 정의된다.

$f(7)=7, f(7^2)=9, f(7^3)=3, f(7^4)=1,$

$f(7^5)=7, f(7^6)=9, f(7^7)=3, f(7^8)=1, \cdots$

이 반복되고 $2006=4\times501+2$이므로

$f(7)+f(7^2)+f(7^3)+\cdots+f(7^{2006})$

$=(7+9+3+1)\times501+(7+9)$

$=10020+16=\mathbf{10036}$

45 $2006x+f(0)=t$라 하면 $x=\frac{t-f(0)}{2006}$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$f(t)=2006\left\{\frac{t-f(0)}{2006}\right\}^2=\frac{\{t-f(0)\}^2}{2006}$ ……㉠

㉠에 $t=0$을 대입하면 $f(0)=\frac{(f(0))^2}{2006}$이므로

$(f(0))^2=2006f(0),\ (f(0))^2-2006f(0)=0$

$f(0)(f(0)-2006)=0$

$\therefore f(0)=0$ 또는 $f(0)=2006$

이 값을 ㉠에 대입하면

$f(t)=\frac{t^2}{2006}$ 또는 $f(t)=\frac{(t-2006)^2}{2006}$

$\therefore \boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{2006}}$ **또는** $\boldsymbol{f(x)=\frac{(x-2006)^2}{2006}}$

46 $x^2=1-2y^2$에서 $x^2\geq0$이므로 $1-2y^2\geq0$

$\therefore y^2\leq\frac{1}{2} \qquad \therefore 0\leq y^2\leq\frac{1}{2}$

$x^4-2x^2y^2+3y^4$

$=(x^2)^2-2x^2y^2+3(y^2)^2$

$=(1-2y^2)^2-2(1-2y^2)y^2+3(y^2)^2$

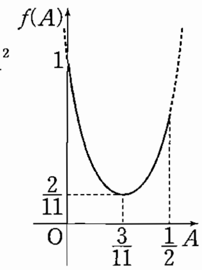
$y^2=A$라 하면 $0\leq A\leq\frac{1}{2}$이므로

(주어진 식)

$=(1-2A)^2-2(1-2A)A+3A^2$

$=11A^2-6A+1$

$=11\left(A-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{2}{11}$



따라서, $A=0$일 때 최대값 1,

$A=\frac{3}{11}$일 때 최소값 $\frac{2}{11}$이므로

(최대값)+(최소값)$=1+\frac{2}{11}=\mathbf{\frac{13}{11}}$

47 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$이 모두 $\frac{1}{2}$ 보다 작다고 가정하면

(i) $|f(1)|<\frac{1}{2},\ |1+p+q|<\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<1+p+q<\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{3}{2}<p+q<-\frac{1}{2}$ ……㉠

(ii) $|f(2)|<\frac{1}{2}$, $|4+2p+q|<\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}<4+2p+q<\frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{9}{2}<2p+q<-\frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(iii) $|f(3)|<\frac{1}{2}$, $|9+3p+q|<\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}<9+3p+q<\frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{19}{2}<3p+q<-\frac{17}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

(㉠+㉢)÷2를 하면 $-\frac{11}{2}<2p+q<-\frac{9}{2}$ ⋯⋯㉣

그런데 ㉡과 ㉣이 다르므로 모순이다.

따라서, $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$의 값 중에서 적어도 하나는 $\frac{1}{2}$보다 크거나 같다.

48 a, b, c는 주사위의 눈의 수이므로 $1\leq a, b, c\leq 6$인 자연수이다.

$y=ax^2+bx+c+2$

$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c+2$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4a(c+2)}{4a}$

이차함수의 그래프가 x축과 만날 조건은 $a>0$이므로 최소값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$-\frac{b^2-4a(c+2)}{4a}\leq 0$, $b^2-4a(c+2)\geq 0$ ($\because a>0$)

$\therefore b^2\geq 4a(c+2)\geq 12$ ($\because a, c\geq 1$) ⋯⋯㉠

따라서, $b=4$, $b=5$, $b=6$의 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

㉠을 만족하는 순서쌍을 (a, b, c)로 나타내면

(i) $b=4$일 때 : $(1, 4, 1)$, $(1, 4, 2)$

(ii) $b=5$일 때 : $(1, 5, 1)$, $(1, 5, 2)$, $(1, 5, 3)$, $(1, 5, 4)$, $(2, 5, 1)$

(iii) $b=6$일 때 : $(1, 6, 1)$, $(1, 6, 2)$, $(1, 6, 3)$, $(1, 6, 4)$, $(1, 6, 5)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(2, 6, 2)$, $(3, 6, 1)$

(i)~(iii)에 의하여 만족하는 순서쌍의 개수는 16개이므로

구하는 확률은 $\frac{16}{6^3}=\mathbf{\frac{2}{27}}$

다른풀이

$y=ax^2+bx+c+2$ $(a>0)$의 그래프가 x축과 만나는 경우는 $ax^2+bx+c+2=0$ $(a>0)$의 판별식이 $D\geq 0$인 경우와 같다.

$D=b^2-4\cdot a(c+2)\geq 0$

$\therefore b^2\geq 4a(c+2)\geq 12$ ($\because a, c\geq 1$)

P. 96~97

특목고 구술·면접 대비 문제

1 풀이 참조 **2** 풀이 참조
3 (1) $-1, 1$ (2) 풀이 참조 **4** 풀이 참조

1 $n+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$

$=n+(1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots$

$\quad+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$

$=n+1\cdot(n-1)+\frac{1}{2}(n-2)+\frac{1}{3}(n-3)+\cdots$

$\quad+\frac{1}{n-2}\{n-(n-2)\}+\frac{1}{n-1}\{n-(n-1)\}$

$=n+(-1)\cdot(n-1)$

$\quad+n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)$

$=n-n+1+n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)$

$=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\left(\because 1=n\cdot\frac{1}{n}\right)$

$=nf(n)$

2 $f(x)=x^2-2bx+c=(x-b)^2+c-b^2$이므로

대칭축은 $x=b$, 꼭지점의 좌표는 $(b, c-b^2)$

(i) $b\leq -1$일 때,

$f(-1)=1+2b+c\geq -1$

$\therefore c\geq -2b-2$ ⋯⋯㉠

$f(1)=1-2b+c\leq 1$ $\quad\therefore c\leq 2b$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $-2b-2\leq c\leq 2b$

$2b\geq -2b-2$에서 $4b\geq -2$ $\quad\therefore b\geq -\frac{1}{2}$

그런데 $b\leq -1$이므로 만족하는 영역이 없다.

(ii) $b\geq 1$일 때,

$f(-1)=1+2b+c\leq 1$ $\quad\therefore c\leq -2b$ ⋯⋯㉢

$f(1)=1-2b+c\geq -1$ $\quad\therefore c\geq 2b-2$ ⋯⋯㉣

㉢, ㉣에서 $2b-2\leq c\leq -2b$

$-2b\geq 2b-2$에서 $4b\leq 2$ $\quad\therefore b\leq\frac{1}{2}$

그런데 $b\geq 1$이므로 만족하는 영역이 없다.

(iii) $-1\leq b\leq 1$일 때,

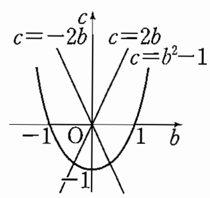
$f(-1)=1+2b+c\leq 1$

$\therefore c\leq -2b$

$f(1)=1-2b+c\leq 1$

$\therefore c\leq 2b$

$f(b)=c-b^2\geq -1$



$\therefore c \geq b^2-1$

(i)~(iii)에서 b, c 사이의 관계식은 $-1 \leq b \leq 1$일 때, $c \leq -2b$, $c \leq 2b$, $c \geq b^2-1$

따라서, 점 (b, c)가 존재하는 영역은 위의 그림에서 색칠한 부분이다. (단, 경계선 포함)

3 (1) $f(48)=f(2^4\times3)=f(2^3\times3)=f(2^2\times3)$
$=f(2\times3)=f(3)$ $(\because f(2n)=f(n))$
$=f(2\times1+1)=(-1)^1=\mathbf{-1}$
$f(1000)=f(2^3\times125)=f(2^2\times125)=f(2\times125)$
$=f(125)=f(2\times62+1)=(-1)^{62}=\mathbf{1}$

(2) 자연수 m, n이 홀수이므로
$m=2k+1$, $n=2l+1$ (k, l은 음이 아닌 정수)라 하면
$f(mn)=f((2k+1)(2l+1))$
$=f(2(2kl+k+l)+1)=(-1)^{2kl+k+l}$
$=(-1)^{2kl}(-1)^{k+l}=(-1)^{k+l}$
$(\because (-1)^{2kl}=1)$
$f(m)f(n)=f(2k+1)f(2l+1)$
$=(-1)^k(-1)^l=(-1)^{k+l}$
$\therefore f(mn)=f(m)f(n)$

4 (1) $|f(x)-f(y)|=|x-y|$에 $y=0$을 대입하면
$|f(x)-f(0)|=|x-0|$
$f(0)=0$이므로 $|f(x)|=|x|$

(2) $|f(x)|=|x|$의 양변을 제곱하면
$\{f(x)\}^2=x^2$ ……㉠
$|f(y)|=|y|$의 양변을 제곱하면
$\{f(y)\}^2=y^2$ ……㉡
$|f(x)-f(y)|=|x-y|$의 양변을 제곱하면
$\{f(x)\}^2-2f(x)f(y)+\{f(y)\}^2=x^2-2xy+y^2$ ……㉢
㉢에 ㉠, ㉡을 대입하면
$x^2-2f(x)f(y)+y^2=x^2-2xy+y^2$
$-2f(x)f(y)=-2xy$ $\quad\therefore f(x)f(y)=xy$

(3) $f(x)f(y)=xy$에 $y=1$을 대입하면
$f(x)f(1)=x$ ……㉣
$f(x)f(y)=xy$에 $x=1$을 대입하면
$f(1)f(y)=y$ ……㉤
㉤에 y 대신 $x+y$를 대입하면
$f(1)f(x+y)=x+y$ ……㉥
㉥에 ㉣, ㉤을 대입하면
$f(1)f(x+y)=f(x)f(1)+f(1)f(y)$
$=f(1)\{f(x)+f(y)\}$
그런데 $|f(x)|=|x|$에서 $f(1)=\pm1\neq0$이므로
$f(x+y)=f(x)+f(y)$

시·도 경시 대비 문제

1 50 **2** 28 **3** 18 **4** 8개 **5** 3
6 $x=-\frac{4}{3}, 0$ **7** 3 **8** ④
9 $f(x)=x^2, f(x)=-x^2$ **10** 20개 **11** 998
12 ①

1 $f(2)=\frac{1}{2}\cdot1$

$f(2^2)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=\frac{1}{2}\cdot2$

$f(2^3)=f(2^2\cdot2)=f(2^2)+f(2)=\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}\cdot3$

$\vdots$

$f(2^n)=\frac{1}{2}\cdot n$

$\therefore f(2^{100})=\frac{1}{2}\cdot100=\mathbf{50}$

2 $f(2)=2, f(2^2)=4, f(2^3)=8, f(2^4)=6,$
$f(2^5)=2, \cdots$이므로
$f(2^{4n})=6, f(2^{4n+1})=2, f(2^{4n+2})=4, f(2^{4n+3})=8$
$\therefore f(2^{2006})=f(2^{4\times501+2})=4$ ……㉠
$f(3)=3, f(3^2)=9, f(3^3)=7, f(3^4)=1,$
$f(3^5)=3, \cdots$이므로
$f(3^{4n})=1, f(3^{4n+1})=3, f(3^{4n+2})=9, f(3^{4n+3})=7$
$\therefore f(3^{2006})=f(3^{4\times501+2})=9$ ……㉡
$f(5)=5, f(5^2)=5, \cdots$이므로 $f(5^n)=5$
$\therefore f(5^{2006})=5$ ……㉢
$f(7)=7, f(7^2)=9, f(7^3)=3, f(7^4)=1,$
$f(7^5)=7, \cdots$이므로
$f(7^{4n})=1, f(7^{4n+1})=7, f(7^{4n+2})=9, f(7^{4n+3})=3$
$\therefore f(7^{2006})=f(7^{4\times501+2})=9$ ……㉣
$f(9)=9, f(9^2)=1, f(9^3)=9, \cdots$이므로
$f(9^{2n})=1, f(9^{2n+1})=9$
$\therefore f(9^{2006})=f(9^{2\times1003})=1$ ……㉤
㉠~㉤에 의해서
$f(2^{2006})+f(3^{2006})+f(5^{2006})+f(7^{2006})+f(9^{2006})$
$=4+9+5+9+1=\mathbf{28}$

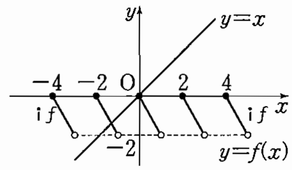
3 7의 거듭제곱의 일의 자리 수는 7, 9, 3, 1로 반복하고, 13의 거듭제곱의 일의 자리 수는 3의 거듭제곱의 일의 자리 수와 같으므로 3, 9, 7, 1로 반복한다.

$\therefore f(2006)+g(2006)$
$=f(4\times501+2)+g(4\times501+2)$
$=9+9=$**18**

4 $f(1)=8-0\times10=8$,
$f(2)=64-6\times10=4$,
$f(3)=512-51\times10=2$,
$f(4)=4096-409\times10=6, \cdots$
따라서, 함수 $f(n)$은 $f(n)=(8^n$의 일의 자리 수)이다.
(i) $n=4k+1\,(k=0, 1, 2, \cdots)$의 꼴일 때,
$f(n)=8$이므로 $\dfrac{n}{f(n)}$이 정수가 되는 경우는 없다.
(ii) $n=4k+2\,(k=0, 1, 2, \cdots)$의 꼴일 때,
$f(n)=4$이므로 $\dfrac{n}{f(n)}$이 정수가 되는 경우는 없다.
(iii) $n=4k+3\,(k=0, 1, 2, \cdots)$의 꼴일 때,
$f(n)=2$이므로 $\dfrac{n}{f(n)}$이 정수가 되는 경우는 없다.
(iv) $n=4k\,(k=1, 2, \cdots)$의 꼴일 때,
$f(n)=6$이므로 $\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{4k}{6}=\dfrac{2k}{3}$가 정수가 되는 경우는 k가 3의 배수, 즉 n이 12의 배수일 때이므로 두 자리의 자연수 n의 개수는
$\left[\dfrac{100}{12}\right]=8$(개)이다.

5 $y=ax+b$의 그래프에서 $a<0, b>0$
$y=ax^2+x+b$
$=a\left\{x^2+\dfrac{1}{a}x+\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2\right\}+b$
$=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2+b-\dfrac{1}{4a}$
꼭지점의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{2a}, b-\dfrac{1}{4a}\right)$이고 $-\dfrac{1}{2a}>0$,
$b-\dfrac{1}{4a}>0$이므로 꼭지점은 제 1사분면에 있다.
$\therefore m=1$
한편, 이차방정식 $ax^2+x+b=0$의 판별식은
$D=1^2-4ab>0$이므로 방정식의 해의 개수는 2개이다.
$\therefore n=2$
$\therefore m+n=1+2=$**3**

6 Ⅱ에서 $f(x+1)=-f(x)$에 x 대신 $x-1$을 대입하면
$f(x)=-f(x-1)=-\{-f(x-2)\}=f(x-2)$
따라서, $f(x)=f(x-2)$이므로 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.
Ⅰ에서 $0\leq x<1$일 때, $f(x)=-2x$이므로 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=x$의 해는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 x좌표이다.
(i) $-2\leq x<-1$일 때, $f(x)=-2x-4$이므로
$-2x-4=x \quad \therefore x=-\dfrac{4}{3}$
(ii) $0\leq x<1$일 때, $f(x)=-2x$이므로
$-2x=x \quad \therefore x=0$
(i), (ii)에서 $\boldsymbol{x=-\dfrac{4}{3}, 0}$

7 주어진 식에 $x=1, y=0$을 대입하면
$f(1)f(0)=2f(1), f(1)\{f(0)-2\}=0$
$f(1)\neq0\ (\because f(1)=1)$이므로 $f(0)=2$
주어진 식에 $x=1, y=1$을 대입하면
$\{f(1)\}^2=f(2)+f(0), 1=f(2)+2 \quad \therefore f(2)=-1$
$\therefore 2f(0)+f(2)=2\cdot2+(-1)=$**3**

8 $f(x)+f(1-x)=7$ ……㉠
$x+f\left(\dfrac{x}{3}\right)=\dfrac{1}{2}f(x)$ ……㉡
㉡에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$
㉠에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+f(0)=7 \quad \therefore f(1)=7$
㉡에 $x=1$을 대입하면
$1+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}f(1) \quad \therefore f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$
㉡에 $x=\dfrac{1}{3}$을 대입하면
$\dfrac{1}{3}+f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{3}\right)$
$\therefore f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{11}{12}}$

9 주어진 식에 $x=0$을 대입하면
$f(f(y))=f(0)+y^2f(y)$ ……㉠
주어진 조건에 x 대신 $f(x)$를 대입하고, ㉠을 이용하면
$f(f(x)+f(y))$
$=f(f(x))+2f(x)y^2+y^2f(y)$
$=f(0)+x^2f(x)+2y^2f(x)+y^2f(y)\ (\because ㉠)$ ……㉡

㉡에서 x와 y를 바꾸어 대입하면

$f(f(y)+f(x))$

$=f(0)+y^2f(y)+2x^2f(y)+x^2f(x)$ ……㉢

㉡의 좌변과 ㉢의 좌변이 같으므로 ㉡의 우변과 ㉢의 우변도 같다.

$\therefore y^2f(x)=x^2f(y)$ ……㉣

$xy\neq0$일 때, $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{f(y)}{y^2}$이므로 $x\neq0$이면

$\dfrac{f(x)}{x^2}=c$ (c는 상수)이고 $f(x)=cx^2$ $(x\neq0)$

그런데 만약 $c=0$이면 $f(x)=0$이 되고, 주어진 조건에서 모든 실수 x, y에 대하여 $0=2xy^2$을 만족하여야 하지만 이는 모순이다.

따라서, $c\neq0$이다.

이제 $x\neq0$일 때, $f(x)=cx^2$을 주어진 조건의 식에 대입하면

$c(x+cy^2)^2=cx^2+2xy^2+y^2(cy^2)$

$cx^2+2c^2xy^2+c^3y^4=cx^2+2xy^2+cy^4$ $(xy\neq0)$

$c^2=1$, $c^3=c$이므로 $c=\pm1$

그런데 ㉣에 $x=0$, $y=1$을 대입하면 $f(0)=0$이고,

$f(x)=x^2$과 $f(x)=-x^2$은 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서, 구하는 함수는

$\boldsymbol{f(x)=x^2, f(x)=-x^2}$

10 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{f(x_1)+(x_2)}{2}$, $f(0)=0$을 만족하는 함수는 원점을 지나는 직선이다.

즉, $y=ax$에서 점 $(100, 40)$을 지나므로 $40=100a$

$a=\dfrac{2}{5}$이므로 $y=\dfrac{2}{5}x$

이 때, 점 (a, b)가 모두 자연수가 되려면 a는 100 이하의 5의 배수이어야 한다.

따라서, 점 (a, b)의 개수는 **20**개이다.

11 $f(1000)=1000-2=998$

$f(996)=f(f(996+4))=f(f(1000))=f(998)$

$f(998)=f(f(998+4))=f(f(1002))$

$=f(1002-2)=f(1000)=998$

$\therefore f(996)=998$

$f(992)=f(f(992+4))=f(f(996))$

$=f(998)=998$

$\vdots$

$\therefore f(1000)=f(996)=f(992)=\cdots=f(200)=\mathbf{998}$

12 함수 $f(x)=f(2-x)$는 $x=1$에 대하여 대칭인 함수이다.

따라서, 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=1$에 대하여 대칭인 값들이다.

즉, $x=1$에 대칭인 두 값들의 합은 2가 되고, 근이 홀수 개일 때는 $x=1$을 근으로 가진다.

따라서, 근의 개수가 1개일 때는 $x=1$이 근이 되고, 근의 개수가 2개이면 $x=1-t$, $1+t$로 합은 2이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$이 k개의 실근을 가질 때, 모든 실근의 합은 $\boldsymbol{k}$가 된다.

P. 102~103

대비 문제

1 $f(x)=\dfrac{1}{5}(x^2-6x+3)$ **2** $\dfrac{5}{6}\leq a<\dfrac{3+\sqrt{11}}{4}$

3 $\dfrac{3}{2}$ **4** -3

1 $2f(x)+3f(1-x)=x^2$ ……㉠

㉠의 x에 $1-x$를 대입하면

$2f(1-x)+3f(x)=(1-x)^2$ ……㉡

㉡×3−㉠×2를 하면

$5f(x)=3(1-x)^2-2x^2=x^2-6x+3$

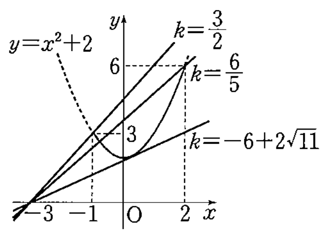
$\therefore \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{5}(x^2-6x+3)}$

2 주어진 이차방정식의 양변을 $a(a\neq0)$로 나누어 정리하면

$x^2+2=\dfrac{1}{a}(x+3)$

여기서 $\dfrac{1}{a}=k$라 하면 $x^2+2=k(x+3)$이고, 두 그래프 $y=x^2+2$와 $y=k(x+3)$이 $-1\leq x\leq2$의 범위에서 두 점에서 만나는 k의 값의 범위를 구하면 된다.

(i) 직선 $y=k(x+3)$이 곡선 $y=x^2+2$에 접할 때,



x^2+2

$=k(x+3)$

$x^2-kx+2-3k=0$

$D=k^2-4(2-3k)=0$

$k^2+12k-8=0$

$\therefore k=-6+2\sqrt{11}$ ($\because k>0$)

(ii) 직선 $y=k(x+3)$이 점 $(-1, 3)$을 지날 때,

$3=2k \quad \therefore k=\frac{3}{2}$

(iii) 직선 $y=k(x+3)$이 점 $(2, 6)$을 지날 때,

$6=5k \quad \therefore k=\frac{6}{5}$

(i)~(iii)에 의하여 k의 값의 범위는

$-6+2\sqrt{11}<k\leq\frac{6}{5}$

$k=\frac{1}{a}$이므로 a의 값의 범위는

$\dfrac{1}{\frac{6}{5}}\leq a<\dfrac{1}{-6+2\sqrt{11}}$

$\therefore \boldsymbol{\frac{5}{6}\leq a<\frac{3+\sqrt{11}}{4}}$

3 $f(x)=2f\left(\frac{x}{3}\right)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$f(x)+f(1-x)=1$에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$

$f(x)=2f\left(\frac{x}{3}\right)$에 $x=1$을 대입하면 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$f(x)+f(1-x)=1$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x\leq y$일 때 $f(x)\leq f(y)$이므로

$x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$일 때, $f(x)=\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{23}}{9}\in\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$이므로 $f\left(\frac{\sqrt{23}}{9}\right)=\frac{1}{2}$

$f(x)=2f\left(\frac{x}{3}\right)$에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{4}$ ······㉠

$f(x)+f(1-x)=1$에 $x=\frac{1}{9}$을 대입하면

$f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{3}{4}$ ······㉡

$f(x)=2f\left(\frac{x}{3}\right)$에 $x=\frac{2}{3}$를 대입하면

$f\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{4}$ ······㉢

$f(x)+f(1-x)=1$에 $x=\frac{2}{9}$를 대입하면

$f\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{3}{4}$ ······㉣

㉠, ㉢에 의하여 $x\in\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$일 때, $f(x)=\frac{1}{4}$

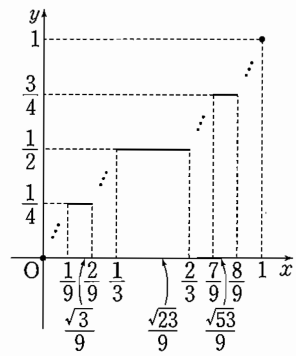
$\frac{\sqrt{3}}{9}\in\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$이므로 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{1}{4}$

㉡, ㉣에 의하여 $x\in\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$일 때, $f(x)=\frac{3}{4}$

$\frac{\sqrt{53}}{9}\in\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$이므로 $f\left(\frac{\sqrt{53}}{9}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)+f\left(\frac{\sqrt{23}}{9}\right)+f\left(\frac{\sqrt{53}}{9}\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$



참고

① $1<\sqrt{3}<2$, $\frac{1}{9}<\frac{\sqrt{3}}{9}<\frac{2}{9}$ $\quad\therefore f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{1}{4}$

② $4<\sqrt{23}<5$, $\frac{1}{3}<\frac{4}{9}<\frac{\sqrt{23}}{9}<\frac{5}{9}<\frac{2}{3}$ $\quad\therefore f\left(\frac{\sqrt{23}}{9}\right)=\frac{1}{2}$

③ $7<\sqrt{53}<8$, $\frac{7}{9}<\frac{\sqrt{53}}{9}<\frac{8}{9}$ $\quad\therefore f\left(\frac{\sqrt{23}}{9}\right)=\frac{3}{4}$

4 $f_1(x)=f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)-3}{f_1(x)+1}=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}$$

$$=-\frac{x+3}{x-1}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)-3}{f_2(x)+1}=\frac{-\frac{x+3}{x-1}-3}{-\frac{x+3}{x-1}+1}=x$$

$f_4(x)=f(f_3(x))=f(x)=f_1(x)$

$f_5(x)=f(f_4(x))=f(f_1(x))=f_2(x)$

$f_6(x)=f(f_5(x))=f(f_2(x))=f_3(x)$, ⋯

$\therefore f_{3n}(x)=f_3(x), f_{3n+1}(x)=f_1(x), f_{3n+1}(x)=f_2(x)$

$\therefore f_{2006}(f_{2007}(3))=f_{3\times668+2}(f_{3\times669}(3))=f_2(f_3(3))$

$=f_2(3)=-\frac{3+3}{3-1}=\mathbf{-3}$

통 계

특목고 대비 문제

P. 108~117

1 43kg **2** $x=3, y=2, z=2$ **3** 8점
4 42 **5** $A=2, B=4, C=4$
6 $A=4, B=3, C=3$ **7** 64명
8 (3, 13), (12, 4), (25, 2) **9** 13 **10** ③
11 $\frac{23}{11}$ **12** 4 **13** 196 **14** $\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$
15 9 **16** 8 **17** $M-3a$ **18** 27
19 $2\sqrt{5}$ **20** $p-m^2$ **21** 2개
22 $x=6, y=10$ **23** 2개
24 풀이 참조, 4월과 9월 **25** 풀이 참조
26 풀이 참조 **27** 풀이 참조
28 풀이 참조 **29** 풀이 참조
30 풀이 참조

1 A학생은 평균보다 4kg이 더 나가므로 F학생은 평균보다 12kg이 더 나간다.
A~E학생 5명의 몸무게의 평균을 m이라 하고, F학생이 포함된 6명의 몸무게의 평균을 m'라 하면

$$m'=\frac{5\times m+(m+12)}{6}=m+m\times 0.04$$

$$\frac{6m+12}{6}=1.04m,\ m+2=1.04m$$

$0.04m=2$ $\therefore m=50(\text{kg})$
따라서, A~E학생 5명의 몸무게의 평균이 50kg이므로 가장 가벼운 B학생의 몸무게는 $50+(-7)=$**43(kg)**이다.

2 국어 성적이 9점 이상인 학생이 7명이므로
$x+y+2=7$
$\therefore x=5-y$ ……㉠
수학 성적이 9점 이상인 학생이 6명이므로
$y+z+2=6$
$\therefore z=4-y$ ……㉡
또한, 전체 학생 수가 35명이므로
$28+x+y+z=35$
$\therefore x+y+z=7$ ……㉢
㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면
$(5-y)+y+(4-y)=7,\ 9-y=7$ $\therefore \boldsymbol{y=2}$
$y=2$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $\boldsymbol{x=3,\ z=2}$

3 다음 표에서 색칠한 부분에 속하는 학생의 수가 16명이고 이 학생들은 두 과목의 총점이 16점 이상이다.
따라서, 상위 16등 이내에 들어가면 두 과목의 평균이 $\frac{16}{2}=$**8(점)** 이상이어야 한다.

국어(점) \ 수학(점)	10	9	8	7	6	5	4	합계
10	2		1		1			4
9		3		1		2		6
8		1	4	1				6
7		2	1	3		1		7
6	1		1	2	2			6
5		1				3		4
4			1				1	2
합계	3	7	8	7	3	6	1	35

4 a, b, c, d, e의 값을 구하면
$a+5=9$이므로 $a=4$
$1+a+10=d$이므로 $d=15$
$6+9+c+7+5=40$이므로 $c=13$
$1+10+b=c$이므로 $b=2$
$5+b+1=e$이므로 $e=8$
$\therefore a+b+c+d+e=\mathbf{42}$

5 전체 학생 수는 40명이고 A, B, C를 제외한 나머지 학생 수를 세어 보면 30명이므로
$A+B+C+30=40$
$\therefore A+B+C=10$ ……㉠
읽은 책의 평균이 3.25권이므로 40명이 읽은 전체 책은 $3.25\times 40=130$(권)이고 A, B, C를 제외한 나머지 학생들이 읽은 책은
$1\times(2+1)+2\times(3+1)+3\times(3+2+4)$
$+4\times(1+2+1)+5\times(2+1+3)+6\times(1+2)$
$=102$(권)
이므로 A, B, C가 읽은 책은
$2(A+B)+4C+102=130$
$\therefore A+B+2C=14$ ……㉡
㉠$-$㉡을 하면 $\boldsymbol{C=4}$, $A+B=6$ ……㉢
또한, 게임을 한 평균 시간이 3.325시간이므로 40명이 한 게임 시간의 총합은 $3.325\times 40=133$(시간)이고 A, B를 제외한 나머지 학생들이 게임을 한 시간은
$1\times(1+1+2)+2\times(2+3)+3\times(3+4)$
$+4\times(2+1)+5\times(2+3+4)+6\times(1+1)+7\times 1$
$=111$(시간)

이므로 A, B가 한 게임 시간은
$3A+4B+111=133$
$\therefore 3A+4B=22$ ⋯⋯㉣
㉢, ㉣을 연립하면 $\mathbf{A=2,\ B=4}$

6 전체 학생 수는 36명이고 A, B, C를 제외한 나머지 학생 수는 26명이므로
$A+B+C+26=36$
$\therefore A+B+C=10$ ⋯⋯㉠
국어의 평균 점수는 80점이므로 36명의 총점은
$80\times36=2880$(점)이고, A, B, C를 제외한 나머지 학생들의 국어 점수의 총합은
$50\times(1+1)+60\times(1+1)+70\times(2+3)+$
$80\times(1+1+4+2)+90\times(2+3)+100\times(2+2)$
$=2060$(점)
이므로 A, B, C의 국어 점수의 합은
$70A+90(B+C)+2060=2880$
$\therefore 7A+9(B+C)=82$ ⋯⋯㉡
㉠$\times9-$㉡을 하면 $2A=8$
$\therefore \mathbf{A=4}$, $B+C=6$ ⋯⋯㉢
또한, 수학의 평균 점수는 75점이므로 36명의 총점은
$75\times36=2700$(점)이고, B, C를 제외한 나머지 학생들의 수학 점수의 총합은
$40\times1+50\times(1+1+2)+60\times(1+3+1)+$
$70\times(4+1)+80\times4+90\times(2+2+2)+100\times(3+2)$
$=2250$(점)
이므로 B, C의 수학 점수의 합은
$70B+80C+2250=2700$
$7B+8C=45$ ⋯⋯㉣
㉢, ㉣을 연립하면 $\mathbf{B=3,\ C=3}$

7 수학과 과학의 점수차가 1점 이하인 학생은 다음과 같다.
(ⅰ) (수학 점수)$-$(과학 점수)$=1$(점)인 경우
$2+3+5+7+3+2+2=24$(명)
(ⅱ) (수학 점수)$-$(과학 점수)$=0$(점)인 경우
$1+2+5+8+1+4+1+1+1=24$(명)
(ⅲ) (과학 점수)$-$(수학 점수)$=1$(점)인 경우
$1+4+6+3+2=16$(명)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 두 과목의 점수차가 1점 이하인 학생은 $24+24+16=$ **64(명)**

8 k개의 과목의 총점은
$k\times(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{kn(n+1)}{2}$
이것은 n명의 학생의 총점과 같으므로
$\dfrac{kn(n+1)}{2}=26n$, $k(n+1)=52$ ($\because n\neq0$)
$\therefore k(n+1)=2\cdot2\cdot13$

k	1	2	4	13
$n+1$	52	26	13	4
n	51	25	12	3

n과 k는 모두 자연수이고, $n\geq2$이므로 이것을 만족하는 순서쌍 (n, k)는 $(3, 13)$, $(12, 4)$, $(25, 2)$, $(51, 1)$
그러나 $(n, k)=(51, 1)$이면 과목의 수 $k=1$이고, 학생 수 $n=51$이므로 모두 다른 점수는 $1, 2, 3, \cdots, 51$이 되어 총점이 모두 26점이라는 사실에 모순이다.
따라서, 가능한 순서쌍 (n, k)는
$\mathbf{(3, 13), (12, 4), (25, 2)}$

참고
$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (단, n은 자연수)

9 4개의 변량 a, b, c, d의 평균이 5, 분산이 2이므로
$\dfrac{a+b+c+d}{4}=5$
$\therefore a+b+c+d=20$
$\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2+(d-5)^2}{4}=2$
$\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2-10(a+b+c+d)+25\times4}{4}=2$
$a+b+c+d=20$이므로 $a^2+b^2+c^2+d^2=108$
변량 $2a-5$, $2b-5$, $2c-5$, $2d-5$의 평균은
$\dfrac{(2a-5)+(2b-5)+(2c-5)+(2d-5)}{4}$
$=\dfrac{2(a+b+c+d)-5\times4}{4}$
$=2\times\dfrac{a+b+c+d}{4}-5$
$=2\times5-5=5$
분산은
$\dfrac{\{(2a-5)-5\}^2+\{(2b-5)-5\}^2+\{(2c-5)-5\}^2+\{(2d-5)-5\}^2}{4}$
$=\dfrac{(2a-10)^2+(2b-10)^2+(2c-10)^2+(2d-10)^2}{4}$
$=\dfrac{4(a^2+b^2+c^2+d^2)-40(a+b+c+d)+100\times4}{4}$
$=\dfrac{4\times108-40\times20+400}{4}=8$
따라서, 평균과 분산의 합은 $5+8=$ **13**이다.

참고

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 평균이 M, 분산이 V일 때,
$ax_1+b,\ ax_2+b,\ ax_3+b,\ \cdots,\ ax_n+b$의 평균을 M', 분산을 V'라 하면 $M'=aM+b,\ V'=a^2V$

10 $1, 3, 5, \cdots, 99$의 평균을 M, 분산을 V라 하면 $2, 4, 6, \cdots, 100$은 $1, 3, 5, \cdots, 99$의 각 변량에 1을 더한 것이다.
따라서, 평균은 $M+1$이고, 분산은 $1^2\times V=V$이다.

11 A분단 5명의 턱걸이 기록을 $x_1, x_2, \cdots, x_5$, B분단 6명의 턱걸이 기록을 $y_1, y_2, \cdots, y_6$이라 하면 11명의 평균은

$$\frac{5\times7+6\times7}{11}=\frac{(5+6)\times7}{11}=7$$

이 때, A분단 5명의 표준편차는 1이므로

$$\frac{(x_1-7)^2+(x_2-7)^2+\cdots+(x_5-7)^2}{5}=1^2$$

$$\therefore (x_1-7)^2+(x_2-7)^2+\cdots+(x_5-7)^2=5$$

B분단 6명의 표준편차는 $\sqrt{3}$이므로

$$\frac{(y_1-7)^2+(y_2-7)^2+\cdots+(y_6-7)^2}{6}=(\sqrt{3})^2$$

$$\therefore (y_1-7)^2+(y_2-7)^2+\cdots+(y_6-7)^2=18$$

따라서, 11명의 분산은

$$\frac{(x_1-7)^2+\cdots+(x_5-7)^2+(y_1-7)^2+\cdots+(y_6-7)^2}{11}$$

$$=\frac{5+18}{11}=\mathbf{\frac{23}{11}}$$

12 5개의 변량 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$의 분산이 8이므로 변량 $\sqrt{2}x_1,\ \sqrt{2}x_2,\ \sqrt{2}x_3,\ \sqrt{2}x_4,\ \sqrt{2}x_5$의 분산은 $(\sqrt{2})^2\times8=16$이 된다.
따라서, 변량 $\sqrt{2}x_1,\ \sqrt{2}x_2,\ \sqrt{2}x_3,\ \sqrt{2}x_4,\ \sqrt{2}x_5$의 표준편차는 $\sqrt{16}=\mathbf{4}$이다.

13 수학 성적의 평균을 M_1이라 하면

$$M_1=\frac{50\times2+60\times13+70\times21+80\times11+90\times3}{50}$$

$$=\frac{3500}{50}=70(\text{점})$$

따라서, 수학 성적에 대한 분산 A는

$$A=\frac{(-20)^2\times2+(-10)^2\times13+10^2\times11+20^2\times3}{50}$$

$$=88$$

영어 성적에 대한 상대도수와 도수를 구하면

점수(점)	상대도수	도수
50	0.08	$0.08\times50=4$
60	0.24	$0.24\times50=12$
70	0.34	$0.34\times50=17$
80	0.28	$0.28\times50=14$
90	0.06	$0.06\times50=3$
합계	1	50

영어 성적의 평균을 M_2라 하면

$$M_2=\frac{50\times4+60\times12+70\times17+80\times14+90\times3}{50}$$

$$=\frac{3500}{50}=70(\text{점})$$

따라서, 영어 성적에 대한 분산 B는

$$B=\frac{(-20)^2\times4+(-10)^2\times12+10^2\times14+20^2\times3}{50}$$

$$=108$$

$$\therefore A+B=88+108=\mathbf{196}$$

14 세 수 x, y, z의 평균을 m이라 하면

$$m=\frac{1}{3}(x+y+z)$$

$$x-m=x-\frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{1}{3}(3x-x-y-z)$$

$$=\frac{1}{3}(2x-y-z)=\frac{1}{3}\{(x-y)-(z-x)\}$$

$$=\frac{1}{3}(a-c)$$

같은 방법으로

$$y-m=\frac{1}{3}(b-a),\ z-m=\frac{1}{3}(c-b)$$

$$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$

$$\therefore s^2=\frac{1}{3}\{(x-m)^2+(y-m)^2+(z-m)^2\}$$

$$=\frac{1}{27}\{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2\}$$

$$=\frac{1}{27}\{2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\}$$

$$=\frac{1}{27}\{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}\ (\because a+b+c=0)$$

참고

위의 식에서 $\frac{1}{27}\{2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\}$의 중괄호 안을 계산하면

$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$
$=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$
$=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$
$=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$\therefore \frac{1}{27}\{2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\}$

$=\frac{1}{27}\{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\}$

15 편차의 합은 0이므로

$3-1+x+y=0$

$\therefore x+y=-2$ ······㉠

분산이 8.8이므로

$\frac{3^2+(-1)^2+x^2+0^2+y^2}{5}=8.8$

$\therefore x^2+y^2=34$ ······㉡

㉠에서 $y=-x-2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x-2)^2=34$, $2x^2+4x-30=0$

$x^2+2x-15=0$, $(x+5)(x-3)=0$

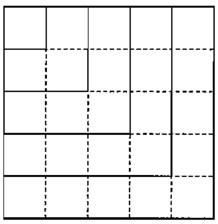
$\therefore x=-5, y=3$ 또는 $x=3, y=-5$

그런데 평균이 6점이므로 영어 점수 a와 과학 점수 b는

$a=1, b=9$ 또는 $a=9, b=1$

$\therefore ab=\mathbf{9}$

16 오른쪽 그림과 같이 점선에 따라 구분하면 작은 정사각형 하나의 넓이가 1이므로 작은 조각부터 순서대로 넓이가 1, 3, 5, 7, 9이다.



따라서, 평균은

$\frac{1+3+5+7+9}{5}=\frac{25}{5}=5$

분산은

$\frac{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5}$

$=\frac{40}{5}=\mathbf{8}$

17 5개의 변량 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 평균이 M이므로

$M=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$

따라서, 변량 x_1-a, x_2-2a, x_3-3a, x_4-4a, x_5-5a의 평균은

$\frac{(x_1-a)+(x_2-2a)+(x_3-3a)+(x_4-4a)+(x_5-5a)}{5}$

$=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}-3a$

$=\boldsymbol{M-3a}$

18 4개의 변량 x_1, x_2, x_3, x_4의 평균이 5, 표준편차가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=5$

$\frac{(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-5)^2+(x_4-5)^2}{4}=(\sqrt{2})^2$ ······㉠

㉠을 전개하면

$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-10(x_1+x_2+x_3+x_4)+100}{4}=2$

위의 식에 $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=5$를 대입하여 계산하면

$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4}=\mathbf{27}$

19 A분단 20명 학생들의 용돈에 대한 분산이 5이므로

$\frac{\{(\text{A분단의 편차})^2\text{의 총합}\}}{20}=5$

$\therefore \{(\text{A분단의 편차})^2\text{의 총합}\}=5\times20=100$

B분단 30명 학생들의 용돈에 대한 분산이 30이므로

$\frac{\{(\text{B분단의 편차})^2\text{의 총합}\}}{30}=30$

$\therefore \{(\text{B분단의 편차})^2\text{의 총합}\}=30\times30=900$

따라서, 전체 50명 학생들의 용돈에 대한 분산은

$\frac{100+900}{20+30}=\frac{1000}{50}=20$

따라서, 표준편차는 $\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

20 변량 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 평균이 m이므로

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=nm$ ······㉠

변량 $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$의 평균이 p이므로

$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=p$

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=np$ ······㉡

따라서, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 분산은

$\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$

$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2m(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nm^2}{n}$

위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(\text{분산})=\frac{np-2m\times nm+nm^2}{n}$

$=\frac{np-nm^2}{n}=\boldsymbol{p-m^2}$

참고
변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 평균을 $\mathrm{E}(X)$, 변량 $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots, x_n^2$의 평균을 $\mathrm{E}(X^2)$이라 하면, 변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 분산은 $\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이다.

21 A마을 각 가구의 가족 수를 $x_i\,(i=1, 2, \cdots, 10)$, B마을 각 가구의 가족 수를 $y_j\,(j=1, 2, \cdots, 20)$라 하고, 두 마을 30가구의 평균 가족 수를 m이라 하면

$$m=\frac{10\times7+20\times4}{10+20}=\frac{150}{30}=5$$

A마을의 가족 수의 표준편차가 2이므로 분산은 4이고

$\frac{1}{10}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-7^2=2^2$이므로

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=530$

B마을의 가족 수의 표준편차가 1이므로 분산은 1이고

$\frac{1}{20}(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2)-4^2=1$이므로

$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2=340$

따라서, A, B 두 마을을 합한 30가구의 가족 수의 분산은

$\frac{1}{30}(530+340)-5^2=29-25=4$

따라서, 표준편차는 $\sqrt{4}=\mathbf{2}$이다.

22 A의 득점의 평균은

$$\frac{10+9+8+5+4+8+7+9+7+3}{10}=\frac{70}{10}=7$$

B의 득점의 평균은 A의 득점의 평균과 같으므로

$$\frac{3+x+7+y+7+5+11+2+12+7}{10}$$
$$=\frac{x+y+54}{10}=7$$

$\therefore x+y=16,\ y=16-x$ ······㉠

A의 득점의 분산은

$$\frac{9+4+1+4+9+1+0+4+0+16}{10}=\frac{48}{10}=4.8$$

B의 득점의 분산은 A의 득점의 분산의 2배이므로

$$\frac{16+(x-7)^2+0+(y-7)^2+0+4+16+25+25+0}{10}$$
$$=\frac{(x-7)^2+(y-7)^2+86}{10}=4.8\times2=9.6$$

$\therefore (x-7)^2+(y-7)^2-10=0$

위의 식에 ㉠을 대입하여 정리하면

$x^2-16x+60=0,\ (x-6)(x-10)=0$

$\therefore \boldsymbol{x=6,\ y=10}\ (\because x<y)$

23 (영희가 가져가는 구슬의 개수)+(철수가 가져가는 구슬의 개수)=3이 되게 만들 수 있다.

따라서, 마지막에 3개의 구슬이 남으면 이길 수 있다. 마찬가지로 6개의 구슬이 남아 있으면 3개의 구슬이 남게 만들 수 있고, 9개의 구슬이 남아 있으면 6개의 구슬이 남게 만들 수 있다.

이런 식으로 생각해 보면 18개의 구슬이 남으면 이길 수 있게 되는데, 구슬이 20개이므로 처음에 **2개**의 구슬을 가져가면 된다.

즉, 영희는 처음에 2개의 구슬을 가져와서 18개의 구슬이 남게 만든 후 철수와 영희가 가져가는 구슬의 개수의 합이 매번 3개가 되게 하면 영희는 항상 이길 수 있다.

24 표를 만들면 다음과 같다.

지울 수 있는 최대 개수	1월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
주어진 날의수	31	28, 29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
처음에 지우는 날의 수	1	1, 2	3		1	2	7	4		9	6	5
먼저한 사람의 승, 패	승	승	승	패	승	승	승	승	패	승	승	승

따라서, **4월과 9월**에만 먼저 하는 사람이 이기지 못한다.

25 1112를 말하는 사람이 지게 되므로 마지막에 1111을 말하는 사람이 이기게 된다.

그러므로 먼저 말하는 사람이 1을 말한 후 나중에 말한 사람의 수의 개수와 처음에 말한 사람의 수의 개수의 합이 3이 되게 만들어 가면 이길 수 있다.

따라서, **먼저 말하는 사람이 1을 말하면 이길 수 있다.**

26 먼저 양쪽의 더미에서 동전이 각각 5개씩 되게 **7개가 있는 더미에서 2개의 동전을 가져온다.**

그리고 난 후 상대방이 가져가는 동전의 수만큼 다른 더미에서 동전을 가져가면 마지막에 동전을 가져갈 수 있으므로 먼저 가져가는 사람이 이길 수 있다.

27 **먼저 가져가는 사람이 1개의 동전을 가져가면 된다.**

그 후 남은 3개의 동전에서 나중에 가져가는 사람의 동전의 개수와 먼저 가져가는 사람의 동전의 개수의 합이 3이 되게 하면 하나도 남지 않을 것이고, 나중에 가져가는 사람이 동전을 다시 내놓을 때는 그 동전의 수만큼 먼저 가져가는 사람이 동전을 가져가면 나중에 가져가는 사람이 더 이상 내놓을 동전이 없어지므로 먼저 가져가는 사람이 이길 수 있다.

28 각각의 더미를 A, B, C더미라 이름을 붙이고, A더미에는 1개, B더미에는 2개, C더미에는 3개의 성냥이 있다고 하자.

그리고, 그 개수를 (1, 2, 3)으로 표시하자.

(i) 먼저 하는 사람이 A더미에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 C더미에서 1개를 가져가면서 (0, 2, 2)로 만들어 나중에 하는 사람이 이기게 된다.

(ii) 먼저 하는 사람이 B더미에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 C더미에서 3개를 다 가져가서 (1, 1, 0)이 되게 하면 나중에 하는 사람이 이기게 되며, 먼저 하는 사람이 B더미에서 2개를 가져가면 나중에 하는 사람은 C더미에서 2개를 가져가서 (1, 0, 1)이 되게 하여 이기게 된다.

(iii) 먼저 하는 사람이 C더미에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 A더미에서 1개를 가져가서 (0, 2, 2)가 되게, 먼저 하는 사람이 C더미에서 2개를 가져가면 나중에 하는 사람은 B더미에서 2개를 가져가서 (1, 0, 1)이 되게, 먼저 하는 사람이 C더미에서 3개를 가져가면 나중에 하는 사람은 B더미에서 1개를 가져가서 (1, 1, 0)이 되게 하여 이기게 된다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 **나중에 하는 사람이 이길 수 있다.**

29 나중에 하는 사람이 이길 수 있다.

A, B, C의 사탕의 개수를 (1, 4, 5)라고 표시하자.

(i) 먼저 하는 사람이 A에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 (0, 4, 4)를 만들면 된다.

(ii) 먼저 하는 사람이 B에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 (1, 3, 2) 또는 (1, 3, 4)를 만들고, 2개를 가져가면 (1, 2, 3)을, 3개를 가져가면 (1, 1, 0)을, 4개를 가져가면 (1, 0, 1)을 만들면 된다.

(iii) 먼저 하는 사람이 C에서 1개를 가져가면 나중에 하는 사람은 (0, 4, 4)를 만들고, 2개를 가져가면 (1, 2, 3)을, 3개를 가져가면 (1, 3, 2)를, 4개를 가져가면 (1, 0, 1)을, 5개를 가져가면 (1, 1, 0)을 만들면 된다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 **나중에 가져가는 사람이 이길 수 있다.**

30 위의 문제에 의하여 (1, 4, 5)가 되게 하면 먼저 가져가는 사람이 이기게 되므로 A묶음에서 2개를 가져가면 **먼저 가져가는 사람이 이기게 된다.**

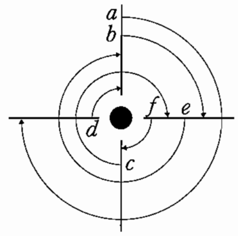
P. 118~119

특목고 구술·면접 대비 문제

1 풀이 참조　　**2** 풀이 참조

3 풀이 참조　　**4** 풀이 참조

1 (1) 다음 그림과 같이 15초 단위로 그림을 그려서 생각해 보자.



0−15초 : a, b, c 진행

15−30초 : a, e, f 진행

30−45초 : a, c, e 진행

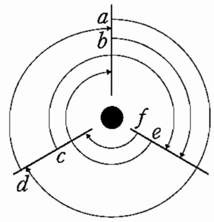
45−60초 : c, d, e 진행

이것은 매 60초 주기에서 흐름 a, c, e는 45초 동안 진행할 수 있고, 흐름 b, d, f는 15초 동안 진행할 수 있음을 의미한다.

따라서, 이 체계의 총 대기 시간은

$(3\times15)+(3\times45)=180$(초)이다.

(2) 다음 그림과 같이 20초 단위로 그림을 그려 생각해 보자.



0−20초 : a, b, c 진행

20−40초 : a, e, f 진행

40−60초 : c, d, e 진행

대기 시간을 계산해 보면 (1)과 같이 180초가 된다.

2 그림을 보면 가운데 칸을 차지하면 주도권을 갖게 된다는 것을 알 수 있다.

왜냐하면 말 3개를 일직선상에 배열하려면 반드시 이곳을 차지해야 하기 때문이다.

그러므로 먼저 하는 사람이 이길 수 있다.

설명의 편의상 A가 먼저 말을 놓을 권리를 얻었다면 첫 번째 말을 ⑤에 놓아야 한다.

그 다음

(i) 만일 B가 ①을 차지했다면 A는 ⑧을 차지하여 B가 ②를 차지하게 하고, 뒤이어 A는 ③을 차지하여 B가 ⑦을 차지하게 한 다음, A는 ⑤, ⑧의 말을 ⑥, ⑨에 옮기면 이기게 된다.

(ii) 만일 B가 ②를 차지했다면 A는 ⑨를 차지하여 B가 ①을 차지하게 하고, 뒤이어 A는 ③을 차지하여 B가 ⑥을 차지하게 한 다음, A는 ⑨의 말을 ⑧로 옮기고, B가 말을 옮기면 A는 ⑧의 말을 ⑦로 옮기면 이기게 된다.

3 12개의 사탕을 세 묶음으로 나누는 방법은 다음과 같이 12가지가 있다.

(1, 1, 10), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 2, 8), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4)

이 중에서 같은 수를 포함하는 경우는 먼저 하는 사람이 이기게 되므로 제외하면 (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 5)만 남게 된다.
(1, 2, 3)과 (1, 4, 5)의 경우는 나중에 하는 사람이 이기게 되므로 먼저 하는 사람이 이와 같은 경우를 만들 수 있는 (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (3, 4, 5)는 나중에 하는 사람이 이기게 된다.
이제 (2, 4, 6)의 경우 나중에 하는 사람이 항상 이길 수 있는지에 대해 생각해 보자.
A묶음에서 1개를 가져가면 (1, 4, 5)를, 2개를 가져가면 (0, 4, 4)를 만들어 이길 수 있다.
B묶음에서 1개를 가져가면 (2, 3, 1)을, 2개를 가져가면 (2, 2, 0), 3개를 가져가면 (2, 1, 3)을, 4개를 가져가면 (2, 0, 2)를 만들어 이길 수 있다.
C묶음에서 1개를 가져가면 (1, 4, 5)를, 2개를 가져가면 (0, 4, 4)를, 3개를 가져가면 (2, 1, 3)을, 4개를 가져가면 (2, 0, 2)를, 5개를 가져가면 (2, 3, 1)을, 6개를 가져가면 (2, 2, 0)을 만들어 이길 수 있다.
따라서, 나중에 가져가는 사람이 이기기 위해서는 사탕을 **(1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (2, 3, 7), (3, 4, 5), (2, 4, 6)**으로 나누면 된다.

4 무게와 가치와 누적무게와 누적가치와 kg당 가치를 표로 나타내면 다음과 같다.

품목	무게	가치	누적무게	누적가치	kg당 가치
카메라	0.2	3	0.2	3	15.00
밧줄	0.9	5	1.1	8	5.56
여벌 옷	0.7	3	1.8	11	4.29
책	0.5	2	2.3	13	4.00
비상 약품	1.1	4	3.4	17	3.64
놀이 기구	1.1	3	4.5	20	2.73
침낭	3.6	4	8.1	24	1.11
식기, 버너세트	6.3	5	14.4	29	0.79

누적무게를 보면 식기, 버너세트를 제외하면 될 것처럼 보이나 누적가치가 24이다.
반면, 놀이 기구를 제외하면 누적가치가 26이며, 무게가 늘어나지만 총무게가 13.6kg을 넘지 않는다.
따라서, **놀이 기구를 제외하고 다 넣으면 된다.**

시·도 경시 대비 문제

P. 120~123

1 2, 7, 17 **2** 평균 182점, 표준편차 $\sqrt{26}$
3 평균 6, 분산 7.4 **4** 0.12 **5** 93점 **6** $\frac{15}{2}$
7 2 **8** 325장 **9** 6 **10** 39 **11** 345분

1 n을 추가하여 크기 순으로 나열하고 중앙값을 구해 보면
n, 3, 6, 9, 10일 때 중앙값은 6
3, n, 6, 9, 10일 때 중앙값은 6
3, 6, n, 9, 10일 때 중앙값은 n
3, 6, 9, n, 10일 때 중앙값은 9
3, 6, 9, 10, n일 때 중앙값은 9
따라서, 중앙값은 6, n, 9이고, 평균은
$\frac{3+6+9+10+n}{5}=\frac{n+28}{5}$
(i) $\frac{n+28}{5}=6$일 때 $n+28=30$ $\therefore n=2$
(ii) $\frac{n+28}{5}=n$일 때 $n+28=5n$ $\therefore n=7$
(iii) $\frac{n+28}{5}=9$일 때 $n+28=45$ $\therefore n=17$
(i)~(iii)에 의하여 n의 값은 **2, 7, 17**이다.

2 표를 이용하여 이긴 게임 수, 진 게임 수, 비긴 게임 수, 득점과 실점을 나타내면

게임 \ 팀	이긴 게임 수	진 게임 수	비긴 게임 수	득점	실점	비고
A	2	0	0	a	181	94점 : B가 얻음 87점 : C가 얻음
B	0	1	1	184	185	95점 : A가 얻음 90점 : C가 얻음
C	0	1	1	177	180	90점 : B가 얻음 90점 : A가 얻음

전체 득점 수와 전체 실점 수는 같아야 하므로
$a+184+177=181+185+180$
$\therefore a=185$
B와 C의 전체 득점 수는 $184+177=361$(점)에서 A의 전체 실점은 181점이므로 B, C 사이에 서로 득점한 점수는 $361-181=180$(점)이고, B와 C는 서로 비겼으므로
$180\div2=90$(점)
$\therefore$ B : C=90 : 90
A : B=(185−90) : (184−90)=95 : 94
A : C=(180−90) : (177−90)=90 : 87
따라서, 각 팀당 득점 비와 득점 수는 다음 표와 같다.

게임	A : B	B : C	C : A
득점 비	95 : 94	90 : 90	87 : 90
득점 수	189	180	177

$\therefore$ (평균)$=\dfrac{189+180+177}{3}=$**182(점)**

(표준편차)

$=\sqrt{\dfrac{1}{3}\{(189-182)^2+(180-182)^2+(177-182)^2\}}$

$=\sqrt{26}$

참고

전체 득점에 대한 평균은 다음과 같이 구할 수도 있다.
3경기의 전체 득점의 합은 실점의 합과 같으므로 평균은

(평균)$=\dfrac{181+185+180}{3}=182$(점)

3 $x_1, x_2, \cdots, x_8$의 평균이 5이므로 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8}=5$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_8=40$ ……㉠

분산이 4이므로 $\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2}{8}-5^2=4$

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2=232$ ……㉡

따라서, $x_1, x_2, \cdots, x_8, x_9, x_{10}$의 평균과 표준편차는

(평균)$=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_8+9+11}{10}$

$=\dfrac{40+9+11}{10}$ ($\because$ ㉠)$=$**6**

(분산)$=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_8^2+9^2+11^2}{10}-6^2$

$=\dfrac{232+81+121}{10}-36$ ($\because$ ㉡)

$=43.4-36=$**7.4**

4 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_{100})^2$

$=(x^2-2a_1x+a_1^2)+(x^2-2a_2x+a_2^2)+\cdots$
$+(x^2-2a_{100}x+a_{100}^2)$

$=100x^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_{100})x$
$+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2)$

따라서, $f(x)$는

$x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{100}$ 일 때 최소값을 갖는다.

그런데 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{100}$은 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$의 평균이므로 평균을 m이라 하면 $f(x)$는 $x=m$일 때 최소값이 12라고 할 수 있다. 따라서, $f(x)$에 $x=m$을 대입하면

$(m-a_1)^2+(m-a_2)^2+\cdots+(m-a_{100})^2=12$

따라서, $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$의 분산은

$\dfrac{(m-a_1)^2+(m-a_2)^2+\cdots+(m-a_{100})^2}{100}$

$=\dfrac{12}{100}=$**0.12**

5 7개의 자료를 작은 수부터 차례로 나열할 때, 가장 작은 자료의 값이 60점이므로 60점이 맨 처음에 오고, 중앙값이 79점이므로 4번째에 79점이 온다. 또한, 최빈값이 85점이므로 가장 큰 수 x가 85점보다 크다고 가정하면 다섯 번째와 여섯 번째에 85점이 각각 온다.

따라서, 두 번째와 세 번째 자료를 각각 a, b로 놓으면 7개의 자료는 다음과 같다.

60, a, b, 79, 85, 85, x

평균은 75점으로 일정하면서 x의 값이 최대가 되려면 a, b의 값이 최소가 되어야 한다. 이 때, 최빈값이 85점이므로 나머지 수들은 서로 같을 수 없다. 즉, a는 60점과 같을 수 없고, b는 79점과 같을 수 없으며, a, b의 값은 서로 다르다.

따라서, $a=61$, $b=62$일 때, x의 값이 최대가 된다.

평균이 75점이므로

$\dfrac{60+61+62+79+85+85+x}{7}=75$

$\dfrac{432+x}{7}=75$ $\quad\therefore x=$**93(점)**

6 n개의 삼각형의 밑변의 길이와 높이를 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$이라 하면

$a_i+b_i=10$ $\quad\therefore b_i=10-a_i$ (단, $i=1, 2, \cdots, n$)

밑변의 길이의 평균이 8이므로 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=8$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=8n$ ……㉠

또, 표준편차가 1이므로 $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}-8^2=1^2$

$\therefore a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=65n$ ……㉡

이 때, 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}a_ib_i$이므로 삼각형의 넓이의 평균은

$\dfrac{\frac{1}{2}a_1b_1+\frac{1}{2}a_2b_2+\cdots+\frac{1}{2}a_nb_n}{n}$

$=\dfrac{1}{2n}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

$=\dfrac{1}{2n}\{a_1(10-a_1)+a_2(10-a_2)+\cdots+a_n(10-a_n)\}$

$=\dfrac{1}{2n}\{10(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\}$

$=\dfrac{1}{2n}(10\times 8n-65n)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=$**$\dfrac{15}{2}$** ($\because n\neq 0$)

7 두 정수 1, 3의 평균이 2이므로 분산은 1이다.

세 정수 1, 3, x의 평균은 $\frac{x+4}{3}$이고, 분산은

$\frac{1^2+3^2+x^2}{3}-\left(\frac{x+4}{3}\right)^2=\frac{2x^2-8x+14}{9}$

문제의 조건에 의하여 $1>\frac{2x^2-8x+14}{9}$이므로

$2x^2-8x+14<9$, $2x^2-8x+5<0$

$2x^2-8x+5=0$에서 $x=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}$이므로

$\frac{4-\sqrt{6}}{2}<x<\frac{4+\sqrt{6}}{2}$ $\quad\therefore 0.77\cdots<x<3.22\cdots$

따라서, 이 부등식을 만족하는 정수 x는 1, 2, 3이지만 1, 3과 다른 수이어야 하므로 **2**이다.

8 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ $\cdots\cdots$㉡

1이 1장, 2가 2장, $\cdots$, n이 n장 쓰여 있는 카드에 쓰여진 숫자의 평균이 17이므로

$\frac{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots+n\cdot n}{1+2+3+\cdots+n}=17$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1)}=17$, $\frac{2n+1}{3}=17$

$2n+1=51$ $\quad\therefore n=25$

따라서, 전체 카드의 수는

$1+2+3+\cdots+25=\frac{1}{2}\times25\times(25+1)=$**325(장)**

9 5개의 자료의 평균을 m이라 하면 분산이 3.2이므로

$(5-m)^2+(8-m)^2+(6-m)^2+(10-m)^2+(x-m)^2$
$=3.2\times5=16$

이것을 정리하면

$x^2-2mx+5m^2-58m+209=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

한편, 편차의 합은 0이므로

$(5-m)+(8-m)+(6-m)+(10-m)+(x-m)$
$=0$

$x+29-5m=0$ $\quad\therefore x=5m-29$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$25m^2-290m+841-10m^2+58m+5m^2-58m$
$+209=0$

$2m^2-29m+105=0$, $(m-7)(2m-15)=0$

$\therefore m=7$ 또는 $m=\frac{15}{2}$ $\quad\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x=6$ 또는 $x=\frac{17}{2}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=$**6**

10 x_1과 x_2에 x_3, x_4, $\cdots$, x_9가 추가되는 경우 자료가 7개 추가되었으므로 x_1, x_2, $\cdots$, x_9의 평균은 x_1과 x_2의 평균보다 $2\times7=14$가 증가한 $5+14=19$이다.

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9}{9}=19$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_9=19\times9=171$ $\quad\cdots\cdots$㉠

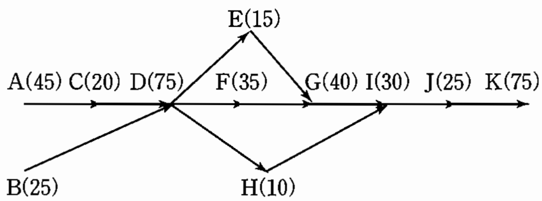
x_1, x_2, $\cdots$, x_9에 x_{10}이 추가되는 경우는 x_1과 x_2에 자료가 8개 추가되었으므로 x_1, x_2, $\cdots$, x_{10}의 평균은 x_1과 x_2의 평균보다 $2\times8=16$이 증가한 $5+16=21$이다.

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_9+x_{10}}{10}=21$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_9+x_{10}=210$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡$-$㉠에서 $x_{10}=$**39**

11 각 활동에 소요되는 시간과 활동 순서를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



전체 활동을 마치기 위해 필요한 최소의 시간은 A에서 K까지의 경로 중 활동 시간이 가장 긴 경로인 A → C → D → F → G → I → J → K가 된다.

따라서, 재원이 가족이 야유회를 마치고 집으로 돌아오는 데 필요한 최소의 시간은

$45+20+75+35+40+30+25+75=$**345(분)**

P. 124~125

대비 문제

1 풀이 참조 **2** 19 **3** 김군, 풀이 참조
4 4.8

1 그림에서 네 모서리에 놓인 카드 위의 수 a, b, c, d는 두 사람의 계산에 모두 들어가므로 합을 비교할 때에는 고려하지 않아도 되고, 가운데 판의 숫자는 계산에 들어가지 않으므로 고려하지 않아도 된다.

a	x_1	b
y_1		y_2
c	x_2	d

$\because$ (갑) : $(a+x_1+b)+(c+x_2+d)$
(을) : $(a+y_1+c)+(b+y_2+d)$
따라서, x_1+x_2와 y_1+y_2의 크기만 비교하면 되는데, 갑이 먼저 9가 적힌 카드를 골라 x_1(또는 x_2)에 놓는다면, 을은 부득이하게 다음으로 큰 수 8이 적힌 카드를 y_1(또는 y_2)에 놓을 수밖에 없다.
다음 갑이 7이 적힌 카드를 골라 x_2(또는 x_1)에 놓는다면, 을은 부득이하게 나머지 카드 중에서 한 개를 y_2(또는 y_1)에 놓을 수밖에 없다.
그러면 $y_1+y_2<x_1+x_2=16$이 된다.
따라서, 갑이 먼저 카드를 골라 놓는다면 이길 수 있다.

다른풀이
위의 경우와 반대되는 방법을 생각해 보자.
갑이 먼저 1이 적힌 카드를 골라 y_1 (또는 y_2)에 놓는다면, 을은 부득이하게 다음으로 작은 수 2가 적힌 카드를 x_1 (또는 x_2)에 놓을 수밖에 없다.
다음 갑이 3이 적힌 카드를 골라 y_2 (또는 y_1)에 놓는다면, 을은 부득이하게 나머지 카드를 골라 x_2 (또는 x_1)에 놓을 수밖에 없다.
그러면 $y_1+y_2=3<x_1+x_2$가 된다.
따라서, 갑이 먼저 카드를 골라 놓으면 이길 수 있다.

2 지뢰를 매설한 정사각형을 제외한 나머지 정사각형에 들어 있는 숫자의 합은 '지뢰를 매설한 정사각형'을 둘러싸고 있는 '나머지 정사각형'의 개수이다.
이 때, 두 번 혹은 세 번 겹쳐지는 정사각형은 두 개 혹은 세 개로 간주한다.
먼저 16개의 정사각형을 분류하여 가장자리에 있는 12개의 정사각형을 Ⅰ구역이라 하고, 중심에 있는 4개의 정사각형을 Ⅱ구역이라 하자. [그림 1]
Ⅰ구역에 지뢰가 매설되면 그 정사각형을 둘러싸는 나머지 정사각형의 개수는 최대 5개가 된다. [그림 2]
Ⅱ구역에 지뢰가 매설되면 그 정사각형을 둘러싸는 나머지 정사각형의 개수는 최대 8개가 된다. [그림 3]

Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ
Ⅰ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅰ
Ⅰ	Ⅱ	Ⅱ	Ⅰ
Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ	Ⅰ

[그림 1]

1	1		
*	1		
1	1		

[그림 2]

1	1	1	
1	*	1	
1	1	1	

[그림 3]

이제 구역을 중심으로 다음과 같이 4가지의 경우에 대해서 살펴보자.
(ⅰ) Ⅰ구역에만 3개의 지뢰를 매설하는 경우 :
(숫자의 합)=(지뢰를 둘러싸는 사각형의 개수)
$\leq 5\times3=15$
(ⅱ) Ⅰ구역에 2개, Ⅱ구역에 1개의 지뢰를 매설하는 경우 :
(숫자의 합)$\leq 5\times2+8\times1=18$
(ⅲ) Ⅰ구역에 1개, Ⅱ구역에 2개의 지뢰를 매설하는 경우 :
Ⅱ구역에 지뢰를 2개 매설하면 지뢰가 서로 이웃하므로 한 지뢰를 둘러싸는 나머지 정사각형의 개수는 최대 7개가 된다.
(숫자의 합)$\leq 5\times1+2\times7=19$
(ⅳ) Ⅱ구역에만 3개의 지뢰를 매설하는 경우 :
Ⅱ구역에 지뢰를 3개 매설하면 세 지뢰가 서로 이웃하므로 한 지뢰를 둘러싸는 나머지 정사각형의 개수는 최대 6개가 된다.
(숫자의 합)$\leq 6\times3=18$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 수의 합의 최대값은 **19**이다.

3 김군에게 $n\neq$(7의 배수)인 경우 필승의 전략이 있다.
$n<7$이면 김군이 바로 n을 고르고 게임은 끝난다.
$n=7$이면 김군이 x를 고르고 이군이 $7-x$를 고르면 이군이 이긴다.
이제 $n>7$이면 김군은 n을 7로 나눈 나머지를 계산하여 그 수를 택하고 그 다음부터는 이군이 x를 택할 때 김군이 $7-x$를 택하면 항상 김군이 이긴다.
즉, 두 사람이 택한 수의 합을 7로 계속 만들어가면 먼저 말한 김군이 항상 이긴다.
예를 들어 $n=15$일 때 7로 나눈 나머지가 1이므로 김군이 먼저 1을 택할 때 이군이 3을 택하면 김군이 4를 택하고, 이군이 5를 택하면 김군이 2를 택하여 항상 김군이 이긴다.
또한, $n=$(7의 배수)이면 이군이 항상 이긴다.
그러므로 $n=50$일 때 7로 나눈 나머지가 1이므로 김군이 먼저 1을 택할 때 이군이 6을 택하면 김군이 1을 택하고, 이군이 4를 택하면 김군이 3을 택하는 등 두 사람이 택한 수의 합을 7로 계속 만들어가면 먼저 말한 김군이 항상 이긴다.

4 동수의 점수를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 영희의 점수를 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5라고 하면 다음이 성립한다.
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5\times6=30$ ······㉠
$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5\times8=40$ ······㉡
$(x_1-6)^2+(x_2-6)^2+\cdots+(x_5-6)^2=5\times1.6=8$ ······㉢
$(y_1-8)^2+(y_2-8)^2+\cdots+(y_5-8)^2=5\times6.0=30$ ······㉣

㉠, ㉡에 의하여 전체 평균은 $\frac{30+40}{5+5}=\frac{70}{10}=7$

따라서, 전체 분산은

$$\frac{1}{10}\{(x_1-7)^2+\cdots+(x_5-7)^2+(y_1-7)^2+\cdots+(y_5-7)^2\}$$

$$=\frac{1}{10}[\{(x_1-6)^2-2(x_1-6)+1\}+\cdots+\{(x_5-6)^2-2(x_5-6)+1\}+\{(y_1-8)^2+2(y_1-8)+1\}+\cdots+\{(y_5-8)^2+2(y_5-8)+1\}]$$

$$=\frac{1}{10}\{(x_1-6)^2+\cdots+(x_5-6)^2+(y_1-8)^2+\cdots+(y_5-8)^2-2(x_1+\cdots+x_5)+2\times6\times5+1\times5+2(y_1+\cdots+y_5)+2\times(-8)\times5+1\times5\}$$

$$=\frac{1}{10}\{8+30-2\times30+65+2\times40-75\}=\mathbf{4.8}$$

피타고라스의 정리

특목고 대비 문제

P. 130~145

1 28 **2** $4\sqrt{2}$ **3** ③ **4** 3
5 (1) ㄷ (2) ㄴ (3) ㄹ (4) ㄹ **6** ④ **7** 9개
8 ② **9** $\frac{10}{3}$ **10** ④ **11** $2\sqrt{37}$ **12** $2\sqrt{5}$
13 32 **14** $2\sqrt{11}$ **15** 24 **16** 114 **17** $\sqrt{149}$
18 16 **19** $2\sqrt{5}$m **20** $16\sqrt{3}$
21 $5+7\sqrt{5}$ **22** $12\sqrt{3}-12$ **23** 39
24 5 **25** $\frac{60}{13}$ **26** 25π **27** $\frac{\sqrt{4a^2-1}}{4}$
28 $\frac{6\sqrt{34}}{17}$ **29** 20
30 $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형 **31** 4개
32 12π **33** $4\sqrt{3}+4$ **34** $4\sqrt{2}$ **35** ④
36 ③ **37** 9 : 8 **38** 10 **39** $\frac{27}{2}$ **40** $\frac{8}{5}\sqrt{10}$
41 $12-6\sqrt{3}$ **42** 21 **43** $6\sqrt{2}$
44 $50(\sqrt{2}+\pi)$ **45** $\frac{256\sqrt{5}}{3}\pi$ **46** $4\sqrt{10}\pi$
47 $2\sqrt{29}$ **48** ⑤ **49** ⑤ **50** $\frac{76}{3}\pi$ **51** $\frac{5}{2}\sqrt{41}$

1 $\overline{AC}=2\overline{AO}=2\cdot5=10$
$\triangle ABC$는 직각삼각형이므로
$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$
따라서, 직사각형의 둘레의 길이는
$2(8+6)=\mathbf{28}$

2 $\triangle ABH$와 $\triangle AHC$는 직각삼각형이므로
$\overline{AH}=x$라 하면
$\overline{AB}^2=x^2+8^2$ ……㉠
$\overline{AC}^2=x^2+4^2$ ……㉡
또한, $\triangle ABC$도 직각삼각형이므로
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(8+4)^2$
$(x^2+64)+(x^2+16)=144$
$x^2=32$ $\therefore x=\overline{AH}=\mathbf{4\sqrt{2}}$ ($\because x>0$)

다른풀이
$\triangle ABH \backsim \triangle CAH$이므로
$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{BH}:\overline{AH}$ $\therefore \overline{AH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{CH}$
$x^2=8\cdot4=32$ $\therefore x=\mathbf{4\sqrt{2}}$ ($\because x>0$)

3 직각삼각형 ADC에서 $x^2=6^2+8^2=100$
$\therefore x=10$
또한, $\triangle DAB \backsim \triangle DCA$이므로
$\overline{DA} : \overline{DC} = \overline{DB} : \overline{DA}$에서
$6 : 8 = y : 6$, $8y=36$ $\therefore y=4.5$
$\therefore xy=10\times4.5=$**45**

다른풀이
$\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{CD}$이므로
$6^2=y\cdot8$ $\therefore y=\frac{9}{2}=4.5$
$\overline{AC}^2=\overline{CD}\cdot\overline{CB}$이므로
$x^2=8\cdot\left(8+\frac{9}{2}\right)$ $\therefore x=10$
$\therefore xy=10\cdot4.5=$**45**

4 x는 삼각형의 변의 길이이므로 $x>0$
직각삼각형의 세 변 중 가장 긴 변의 길이인 $x+2$가 빗변이므로
$(x+2)^2=(x+1)^2+x^2$
$x^2+4x+4=x^2+2x+1+x^2$
$x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$
$\therefore x=$**3** $(\because x>0)$

5 (1) $15^2=9^2+12^2$이므로
ㄷ. 직각삼각형
(2) $5^2+7^2=74>8^2$이므로
ㄴ. 예각삼각형
(3) $7^2+8^2=113<11^2=121$이므로
ㄹ. 둔각삼각형
(4) $10^2+10^2=200<15^2$이므로
ㄹ. 둔각(이등변)삼각형

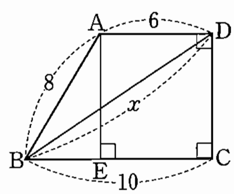
6 ① 둔각삼각형이므로 $x^2>5^2+7^2$ $\therefore x^2-7^2>5^2$
③, ⑤ 삼각형이므로 $x+5>7$, $x<5+7$, 즉 $x-7<5$이므로 $(x-7)^2<5^2$
④ $x<5+7$이므로 $x^2<(5+7)^2$

7 삼각형이 되어야 하므로
$9-7<x<9+7$ $\therefore 2<x<16$ ……㉠
또한, $\angle A$가 예각이므로
$x^2<7^2+9^2=130$ $\therefore 0<x<\sqrt{130}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $2<x<\sqrt{130}$
그런데 $11<\sqrt{130}<12$이므로 자연수 x의 개수는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 **9개**이다.

8 가장 긴 변을 c라 하고 나머지 두 변을 각각 a, b라 하면 $c^2=a^2+b^2$이 되는 c, a, b의 쌍을 구하면 된다.
$c=13$일 때, 가능한 순서쌍은 13, 12, 5이다.
$c=12$일 때, $c^2=144$이므로 a, b는 둘 다 짝수이거나 홀수이다.
$6^2+8^2\neq12^2$, $6^2+10^2\neq12^2$, $8^2+10^2\neq12^2$이므로 a, b가 둘 다 짝수인 경우는 없다.
또한, $5^2+7^2\neq12^2$이므로 $c=12$인 쌍은 존재하지 않는다.
$c=10$일 때, $6^2+8^2=10^2$, $5^2+7^2\neq10^2$이므로 만족하는 순서쌍은 10, 8, 6이다.
$c=8$일 때, $5^2+7^2\neq8^2$, $c=7$일 때, $5^2+6^2\neq7^2$
따라서, 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 **2개**이다.

9 $\triangle APQ\equiv\triangle ADQ$(SAS 합동)이므로
$\overline{AD}=\overline{AP}=\overline{BC}=10$
직각삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=\sqrt{10^2-6^2}=8$
$\therefore \overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=2$
또한, $\overline{PQ}=\overline{DQ}=x$라 하면 $\overline{CQ}=6-x$이므로
직각삼각형 PCQ에서
$x^2=(6-x)^2+2^2$, $12x=40$
$\therefore x=\mathbf{\frac{10}{3}}$

10 $\overline{AD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$
$\overline{BD}=\sqrt{15^2-12^2}=9$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times(9+5)\times12=$**84**

11 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E라 하면


$\overline{EC}=\overline{AD}=6$이므로 $\overline{BE}=4$
직각삼각형 ABE에서
$\overline{AE}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}=\overline{DC}$
직각삼각형 BDC에서
$\overline{BD}=\sqrt{10^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{148}=\mathbf{2\sqrt{37}}$

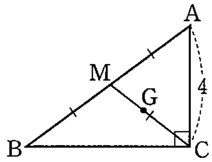
12 두 대각선의 교점을 P라 하면
$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ ……㉠
$\overline{CD}^2=\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$ ……㉡
$\overline{AD}^2=\overline{AP}^2+\overline{DP}^2$ ……㉢
$\overline{BC}^2=\overline{CP}^2+\overline{BP}^2$ ……㉣
㉠+㉡=㉢+㉣이므로
$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$
$9+36=25+x^2$ $\therefore x=\mathbf{2\sqrt{5}}$

13 $\triangle$DCE는 직각삼각형이므로

$\overline{DC}=\sqrt{10^2-6^2}=8=\overline{BC}$

$\therefore \triangle BCE=\frac{1}{2}\times 8\times 8=\mathbf{32}$

14 오른쪽 그림에서 $\overline{CG}$의 연장선과 $\overline{AB}$와의 교점을 M이라 하면



$\overline{CM}=\frac{3}{2}\overline{CG}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

또한, 빗변 AB의 중점 M은 직각삼각형의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\sqrt{11}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{11}\times 4=\mathbf{2\sqrt{11}}$

15 $\overline{AC}=\sqrt{10^2-8^2}=6$이므로

(색칠한 부분의 넓이)

$=$($\triangle$ABC의 넓이)$+$(지름이 AB인 반원의 넓이)

$+$(지름이 AC인 반원의 넓이)

$-$(지름이 BC인 반원의 넓이)

$=24+8\pi+\frac{9}{2}\pi-\frac{25}{2}\pi=\mathbf{24}$

다른 풀이

색칠한 부분의 넓이는 $\triangle$ABC의 넓이와 같다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=\mathbf{24}$

16 $\triangle$ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{225}=15$

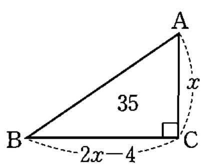
또한, $\triangle$ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{15^2-9^2}=\sqrt{144}=12$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 15+\frac{1}{2}\times 12\times 9$

$=\mathbf{114}$

17 직각삼각형의 높이를 x라 하면 밑변의 길이는 $2x-4$이고, $\triangle$ABC의 넓이가 35이므로



$\frac{1}{2}x(2x-4)=35$

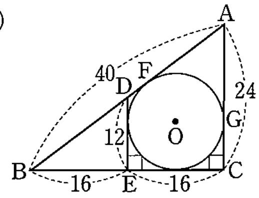
$x^2-2x-35=0$

$(x+5)(x-7)=0 \quad \therefore x=7\ (\because x>2)$

따라서, 높이는 7이고 밑변의 길이는 10이므로

$\overline{AB}=\sqrt{10^2+7^2}=\mathbf{\sqrt{149}}$

18 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$(AA 닮음)



이고, 닮음비가 2 : 1이므로

$\overline{EC}=16$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{24^2+32^2}=40$

오른쪽 그림에서 $\triangle$ABC의 넓이를 S라 하고, 내접원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}\times 32\times 24$

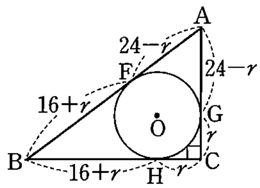
$=\frac{1}{2}\times 40\times r+\frac{1}{2}\times 32\times r+\frac{1}{2}\times 24\times r$

$=\frac{1}{2}\times r\times(40+32+24)$

$\therefore r=8 \qquad \therefore \overline{AF}=\overline{AG}=24-r=\mathbf{16}$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 내접원이 $\triangle$ABC의 세 변 AB, BC, CA와 만나는 점을 차례로 F, H, G라 하고 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$r=\overline{CG}=\overline{CH}$,

$\overline{AF}=\overline{AG}=24-r$, $\overline{BF}=\overline{BH}=16+r$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=(24-r)+(16+r)=40$

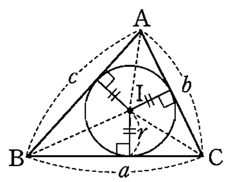
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이므로 $40^2=(16+2r)^2+24^2$

$r^2+16r-192=0$, $(r+24)(r-8)=0$

$\therefore r=8\ (\because 0<r<24) \qquad \therefore \overline{AF}=\mathbf{16}$

참고

오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC의 내접원의 중심을 I, 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle$ABC의 넓이 S는



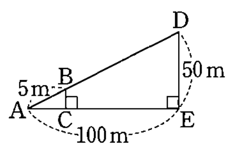
$S=\triangle ABC$

$=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$

$=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$

$=\frac{r}{2}(a+b+c)$

19 오른쪽 그림의 직각삼각형 ADE에서



$\overline{AD}=\sqrt{100^2+50^2}=50\sqrt{5}$

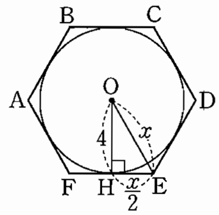
또한, $\triangle$ABC와 $\triangle$ADE는 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$

$5:50\sqrt{5}=\overline{AC}:100$

$\therefore \overline{AC}=\mathbf{2\sqrt{5}\,(m)}$

20 오른쪽 그림에서 정육각형의 한 변의 길이를 x라 하면 $\triangle OHE$에서



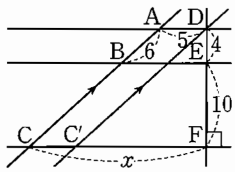
$\overline{OE}^2=\overline{OH}^2+\overline{HE}^2$

$x^2=16+\dfrac{x^2}{4}$

$x^2=\dfrac{64}{3}$ $\quad\therefore x=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

따라서, 정육각형의 둘레의 길이는 $6x=\mathbf{16\sqrt{3}}$

21 $\overleftrightarrow{AD}/\!/\overleftrightarrow{BE}/\!/\overleftrightarrow{CF}$이므로



$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$

$6:\overline{BC}=4:10$

$\therefore \overline{BC}=15$

점 D를 지나고 $\overleftrightarrow{AC}$에 평행한 직선이 $\overleftrightarrow{CF}$와 만나는 점을 C′라 하면 $\triangle DC'F$는 직각삼각형이고, $\overline{CF}=x$라 하면

$\overline{C'F}=x-5$

$\overline{DC'}^2=\overline{C'F}^2+\overline{DF}^2$, $(6+15)^2=(x-5)^2+(4+10)^2$

$(x-5)^2=21^2-14^2$, $x-5=7\sqrt{5}$ ($\because x>5$)

$\therefore x=\mathbf{5+7\sqrt{5}}$

22 네 개의 직각삼각형 ABQ, BCR, CDS, DAP는 합동인 삼각형이다. (RHS 합동)

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{AQ}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$이므로 정사각형 PQRS의 한 변의 길이 $\overline{PQ}$는

$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=3\sqrt{3}-3$

따라서, 정사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$4\cdot(3\sqrt{3}-3)=\mathbf{12\sqrt{3}-12}$

23 $\overline{AD}=x$라 하면

$\triangle ABD$에서

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=64-x^2$

$\triangle ADC$에서

$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=25-x^2$

$\therefore \overline{BD}^2-\overline{CD}^2=(64-x^2)-(25-x^2)=\mathbf{39}$

24 $\overline{ED}=x$라 하면 $\overline{ED}=\overline{EA}=x$이므로 $\overline{EB}=9-x$

$\triangle EBD$에서 $x^2=(9-x)^2+3^2$, $18x=90$

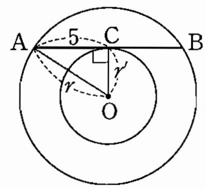
$\therefore x=\mathbf{5}$

25 직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

또한, $\overline{AH}=x$라 하면 $\triangle ABD$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times12\times5=\dfrac{1}{2}\times13\times x$ $\qquad\therefore x=\mathbf{\dfrac{60}{13}}$

26 큰 원의 반지름의 길이를 r, 작은 원의 반지름의 길이를 r'라고 하자.



$\overline{AB}$는 작은 원의 접선이므로

$\overline{OC}\perp\overline{AB}$,

$\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=5$

직각삼각형 ACO에서 $r^2-r'^2=5^2$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=$(큰 원의 넓이)$-$(작은 원의 넓이)

$=\pi r^2-\pi r'^2=\pi(r^2-r'^2)=\mathbf{25\pi}$

27 $ab(a-b)-a^2+b^2+a-b=0$에서

$a^2b-ab^2-a^2+b^2+a-b=0$

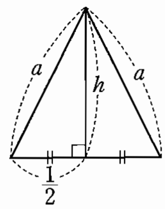
$(b-1)a^2-(b^2-1)a+b^2-b=0$

$(b-1)a^2-(b-1)(b+1)a+b(b-1)=0$

$(b-1)\{a^2-(b+1)a+b\}=0$

$(b-1)(a-1)(a-b)=0$

$a\neq1$, $b\neq1$이므로 $a=b$



따라서, 삼각형의 세 변의 길이가 1, a, a이므로 이 삼각형의 높이 h는

$h=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2}$

따라서, 삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{4}}$

28 $\triangle AFC$에서

$\overline{AF}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{FC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

사면체 B$-$AFC의 부피를 V라 하고, 꼭지점 B에서 면 AFC 사이의 거리를 x라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABF\times\overline{BC}$

$\;=\dfrac{1}{3}\times\triangle AFC\times x$

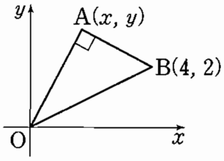
$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\right)\cdot3=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}\right)\cdot x$

$\therefore x=\dfrac{4\cdot4\cdot3}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}=\mathbf{\dfrac{6\sqrt{34}}{17}}$

참고

$\triangle AFC$는 $\overline{FC}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 문제 **27**번에서 풀이한 방법으로 $\triangle AFC$의 넓이를 구한다.

29 좌표평면에 세 점 O, A, B를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$,

$\overline{AB}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$

$\overline{OB}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$

△OAB는 직각삼각형이므로

$\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$

$\therefore x^2+y^2+(x-4)^2+(y-2)^2=$**20**

30 $\overline{AB}=\sqrt{16+0}=\sqrt{16}$, $\overline{BC}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$,

$\overline{AC}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$\overline{BC}=\overline{AC}$이고 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이므로

△ABC는 **∠C=90°인 직각이등변삼각형**이다.

참고

정답을 이등변삼각형 또는 직각삼각형이라고 하면 안 된다.
또한, 이등변삼각형이면 어느 두 변이 같은지를 밝혀야 하고 직각삼각형이면 어느 각이 직각인지 또는 어느 변이 빗변인지를 꼭 밝혀야 한다.
이 문제는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BC}=\overline{AC}$인 직각이등변삼각형 또는 $\overline{AB}$가 빗변인 직각이등변삼각형 또는 ∠C=90°인 직각이등변삼각형이라고 답해야 한다.

31 △ABC가 예각삼각형이 되려면

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2>\overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{BC}^2$,

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2>\overline{AB}^2$을 모두 만족해야 한다.

(i) $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2>\overline{AC}^2$

$5+(a-3)^2+25>(a-2)^2+9 \qquad \therefore a<13$

(ii) $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{BC}^2$

$5+(a-2)^2+9>(a-3)^2+25 \qquad \therefore a>8$

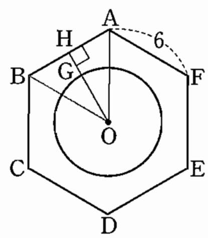
(iii) $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2>\overline{AB}^2$

$(a-2)^2+9+(a-3)^2+25>5$,

$(a-2)^2+(a-3)^2+29\geq 29>0$이므로 만족하는 a의 값의 범위는 모든 실수이다.

(i)~(iii)에 의하여 $8<a<13$이므로 만족하는 정수 a는 9, 10, 11, 12로 **4개**이다.

32 오른쪽 그림에서 수선의 발을 H라 하면 △ABO는 정삼각형이므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$, $\overline{AO}=6$

$\overline{OH}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OG}=\frac{2}{3}\overline{OH}=2\sqrt{3}$

따라서, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{3})^2=$**12π**

33 직각삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=8$, ∠B=30°이므로

$\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=4\sqrt{3}$

또한, 직각삼각형 ADC에서 ∠C=45°이므로

$\overline{DC}=\overline{AD}=4$, $\overline{AC}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=$**$4\sqrt{3}+4$**

34 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, ∠BAC=60°이므로

$\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4\sqrt{3}$

따라서, 직각삼각형 ACD에서 ∠ACD=45°이므로

$\overline{AC}:\overline{CD}=\sqrt{2}:1$, $8:\overline{CD}=\sqrt{2}:1$

$\sqrt{2}\cdot\overline{CD}=8 \qquad \therefore \overline{CD}=$**$4\sqrt{2}$**

35 ① $\overline{OB}=\overline{OB'}=\sqrt{2}$cm, $\overline{OC}=\overline{OC'}=\sqrt{3}$cm

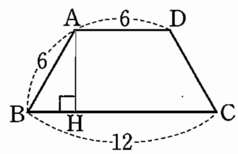
② $\overline{OA}=1$cm, $\overline{OB}=\sqrt{2}$cm이므로 $\overline{AB}=(\sqrt{2}-1)$cm

③, ④, ⑤ △OB′B, △OC′C, △OD′D는 모두 이등변삼각형이다.

따라서, ④에서 $\overline{OC'}=\overline{OC}$이므로 ∠OC′C=∠OCC′이다.

그런데 ∠OC′C>90°이거나 ∠OC′C=90°이면 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°보다 커지므로 ∠OC′C<90°이다.

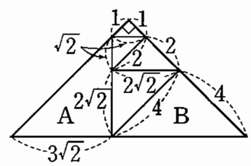
36 꼭지점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=3$이므로



$\overline{AH}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore$ □ABCD$=\frac{1}{2}\times(12+6)\times3\sqrt{3}=$**$27\sqrt{3}$**

37 제일 작은 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이를 1이라 하면 나머지 변의 길이는 오른쪽 그림과 같다.



직각삼각형 A의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=9$

직각삼각형 B의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

∴ A : B=**9 : 8**

다른풀이

두 직각이등변삼각형은 서로 닮음이고, 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이므로 직각삼각형 A, B의 닮음비는 $3\sqrt{2}:4$이므로 넓이의 비는

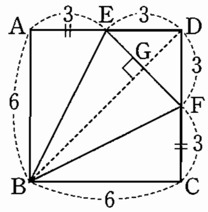
$(3\sqrt{2})^2:4^2=18:16 \qquad \therefore$ **9 : 8**

38 $\overline{AB}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$, $\overline{AC}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,
$\overline{BC}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$이므로 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$
따라서, $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=\mathbf{10}$

39 $\overline{AE}=\overline{CF}=3$, $\overline{AB}=6$이므로



$\overline{BE}=\overline{BF}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$
$\overline{ED}=\overline{DF}=3$이므로 $\overline{EF}=3\sqrt{2}$
또한, 대각선 BD가 $\overline{EF}$와 만나는 점을 G라 하면
$\overline{BG}\perp\overline{EF}$

$\therefore \overline{BG}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \triangle BFE=\frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{BG}$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\frac{27}{2}}$

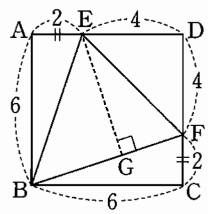
다른풀이

$\triangle BFE=\square ABCD-(\triangle ABE+\triangle BCF+\triangle EFD)$

$=6\cdot 6-\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)$

$=36-\frac{45}{2}=\mathbf{\frac{27}{2}}$

40 $\triangle BEF$



$=36-\frac{1}{2}(2\cdot 6+2\cdot 6+4\cdot 4)$

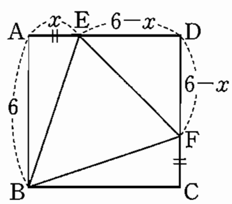
$=36-20=16$

점 E에서 변 BF에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\triangle BEF=\frac{1}{2}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{EG}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+36}\cdot\overline{EG}=16$

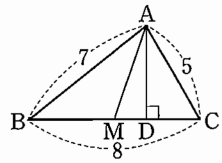
$\therefore \overline{EG}=\frac{16}{\sqrt{10}}=\mathbf{\frac{8}{5}\sqrt{10}}$

41 $\triangle BEF$가 정삼각형이 되려면



$\overline{BE}=\overline{BF}$이므로
$\overline{AE}=\overline{CF}=x$라 하면
$\overline{BE}=\overline{BF}=\sqrt{x^2+36}$ ······㉠
또한, $\overline{ED}=\overline{DF}=6-x$이므로
$\overline{EF}=\sqrt{2}(6-x)$ ······㉡
㉠=㉡이어야 $\triangle BEF$가 정삼각형이 되므로
$\sqrt{x^2+36}=\sqrt{2}(6-x)$, $x^2+36=2(6-x)^2$
$x^2-24x+36=0$ $\quad\therefore x=12\pm 6\sqrt{3}$
그런데 $0<x<6$이므로 $\mathbf{x=12-6\sqrt{3}}$

42 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\triangle ABD$에서
$\overline{AB}^2=(\overline{BM}+\overline{MD})^2+\overline{AD}^2$
$49=(4+\overline{MD})^2+\overline{AD}^2$
$\therefore \overline{AD}^2=49-(4+\overline{MD})^2$ ······㉠
$\triangle ADC$에서
$\overline{AC}^2=(\overline{MC}-\overline{MD})^2+\overline{AD}^2$
$25=(4-\overline{MD})^2+\overline{AD}^2$
$\therefore \overline{AD}^2=25-(4-\overline{MD})^2$ ······㉡
㉠=㉡이므로
$49-(4+\overline{MD})^2=25-(4-\overline{MD})^2$
따라서, $\overline{MD}=\frac{3}{2}$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$\overline{AD}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$\triangle AMD$에서

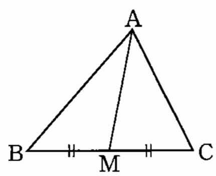
$\overline{AM}^2=\overline{MD}^2+\overline{AD}^2=\frac{9}{4}+\frac{75}{4}=\mathbf{21}$

다른풀이

파포스(Pappos)의 정리를 이용하면
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로
$7^2+5^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$, $2(\overline{AM}^2+16)=74$
$\overline{AM}^2+16=37$ $\quad\therefore \overline{AM}^2=\mathbf{21}$

참고

파포스(Pappos)의 정리



$\triangle ABC$에서 변 BC의 중점을 M이라고 하면
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

43 점 H는 밑면 $\triangle ABC$의 무게중심이므로

$\overline{AH}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\right)=2\sqrt{3}$

또한, 직각삼각형 VAH에서
$\overline{VH}=\sqrt{\overline{VA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{36-12}$
$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\therefore \triangle VAH=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{VH}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$

$=\mathbf{6\sqrt{2}}$

44 주어진 입체도형의 겉넓이는 이등변삼각형, 부채꼴, 반원의 넓이의 합과 같다.

(ⅰ) 이등변삼각형의 넓이 S_1 :

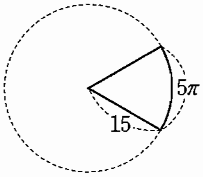
원뿔의 높이를 h라 하면

$h=\sqrt{15^2-5^2}=10\sqrt{2}$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times10\times10\sqrt{2}=50\sqrt{2}$

(ⅱ) 부채꼴의 넓이 S_2 :

옆면의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



부채꼴의 호의 길이가

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot5=5\pi$이므로

$S_2=\frac{1}{2}\times15\times5\pi=\frac{75}{2}\pi$

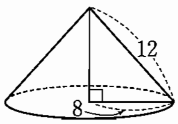
(ⅲ) 반원의 넓이 S_3

$S_3=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot5^2=\frac{25}{2}\pi$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 입체도형의 겉넓이는

$50\sqrt{2}+\frac{75}{2}\pi+\frac{25}{2}\pi=\mathbf{50(\sqrt{2}+\pi)}$

45 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는



$2\times\pi\times12\times\frac{240^\circ}{360^\circ}=16\pi$

밑면의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=16\pi \qquad \therefore r=8$

따라서, 원뿔의 높이를 h라 하면

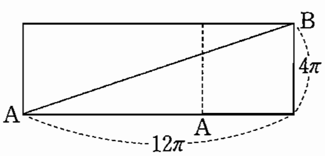
$h=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$

그러므로 원뿔의 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times4\sqrt{5}$

$=\mathbf{\frac{256\sqrt{5}}{3}}\pi$

46 실의 길이의 최소값은 실을 팽팽히 잡아당길 때이다.
전개도를 그려보면 다음과 같다.

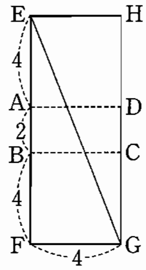


따라서, 실의 길이의 최소값은 $\overline{AB}$의 길이와 같다.

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(12\pi)^2+(4\pi)^2}$

$=\mathbf{4\sqrt{10}\pi}$

47 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
최단 거리는 전개도에서 $\overline{EG}$의 길이이므로



$\overline{EG}=\sqrt{(4+2+4)^2+4^2}$

$=\mathbf{2\sqrt{29}}$

48 구에 내접하는 정육면체의 대각선의 길이는 구의 지름의 길이 $8\sqrt{3}$과 같다.
정육면체의 한 변의 길이를 x라 하면 정육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{3}x$이므로

$\sqrt{3}x=8\sqrt{3} \qquad \therefore x=8$

49 $\overline{VA}=\overline{VB}=\overline{VC}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{VH}^2}$

$=\sqrt{8+112}=2\sqrt{30}$

또한, $\overline{CH}=2\sqrt{2}$, $\overline{AC}=2\,\overline{CH}=4\sqrt{2}$이고 □ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}=4$이다.

△VAB의 높이를 h라 하면

$h=\sqrt{(2\sqrt{30})^2-2^2}=2\sqrt{29}$

$\therefore \triangle VAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

$=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{29}$

$=\mathbf{4\sqrt{29}}$

50 $\overline{BO'}=\sqrt{\overline{BO}^2-\overline{OO'}^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$이므로

(원뿔의 밑면의 넓이)$=\pi\cdot(2\sqrt{2})^2=8\pi$

$\therefore$ (원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times8\pi\times4=\frac{32}{3}\pi$

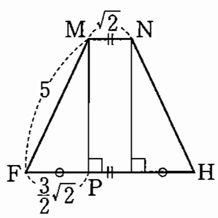
따라서, 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\times\pi\times3^3-\frac{32}{3}\pi=\mathbf{\frac{76}{3}}\pi$

51 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{MN}=\sqrt{2}$, $\overline{FH}=4\sqrt{2}$, $\overline{MF}=\overline{NH}=5$

점 M에서 $\overline{FH}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\overline{MP}=\sqrt{\overline{MF}^2-\overline{FP}^2}$

$=\sqrt{5^2-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{41}{2}}=\frac{\sqrt{82}}{2}$

$\therefore$ □MFHN$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{82}}{2}$

$=\mathbf{\frac{5}{2}\sqrt{41}}$

P. 146~147

특목고 구술·면접 대비 문제

1 풀이 참조 **2** 풀이 참조

3 풀이 참조 **4** $\dfrac{7-\sqrt{15}}{3}$

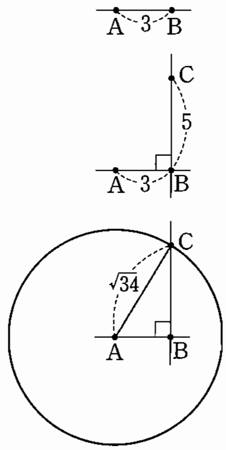
1 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합은 $9\pi+25\pi=34\pi$
두 원의 넓이의 합과 넓이가 같은 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{34}$이므로 길이가 $\sqrt{34}$인 선분을 작도할 수 있으면 된다.

작도 방법 및 순서

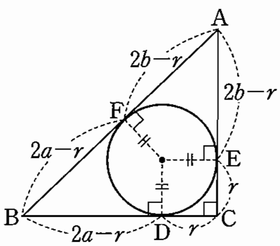
① 직선을 긋고 직선 위에 $\overline{AB}=3$이 되도록 두 점 A, B를 잡는다.

② 점 B를 지나고 처음 직선에 수직인 직선을 작도한 후 $\overline{BC}=5$인 점 C를 잡는다.

③ $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AC}=\sqrt{34}$이고, $\overline{AC}$를 반지름으로 하는 원을 그리면 그 원의 넓이는 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합과 같다.



2 직각삼각형 ABC에서 빗변의 길이를 $2c$, 다른 두 변의 길이를 각각 $2a$, $2b$라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r(a, b, c, r는 자연수)라 하면 오른쪽 그림에서



$2c=(2a-r)+(2b-r)$

$\therefore r=a+b-c$ ······㉠

한편, 피타고라스의 정리에 의하여

$(2a)^2+(2b)^2=(2c)^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ ······㉡

㉡에서

(i) a, b가 짝수이면 c도 짝수

(ii) a가 짝수, b가 홀수 또는 a가 홀수, b가 짝수이면 c는 홀수

(iii) a, b가 홀수이면 c는 짝수이어야 하지만 성립하지 않는다. 왜냐 하면

$a=2m+1$, $b=2n+1$, $c=2l$ (l, m, n은 자연수)를 ㉡에 대입하면

$(2m+1)^2+(2n+1)^2=(2l)^2$

$4m^2+4m+4n^2+4n+2=4l^2$

위의 식의 양변을 2로 나누면

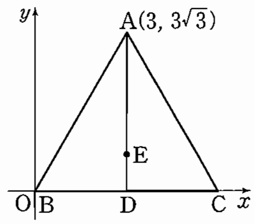
$2m^2+2m+2n^2+2n+1=2l^2$

$\therefore 2(m^2+m+n^2+n)+1=2l^2$

즉, (홀수)=(짝수)가 되어 모순이다.

(i), (ii)에서 어느 경우나 $a+b-c$는 짝수, $a+b-c>0$이므로 r는 짝수이다.

3 B 마을을 좌표평면에서 원점 $(0, 0)$으로 하면 세 마을 A, C, D의 좌표는 각각 $A(3, 3\sqrt{3})$, $C(6, 0)$, $D(3, 0)$이다.



$\left(\because \overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=3\sqrt{3}\right)$

학교의 좌표를 $E(3, b)$ $(0<b<3\sqrt{3})$라 하면 네 마을 A, B, C, D로부터 학교까지의 거리의 제곱의 합은

$(3\sqrt{3}-b)^2+(3^2+b^2)+(3^2+b^2)+b^2$

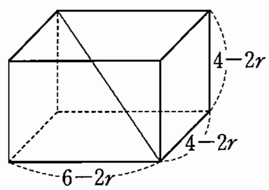
$=4b^2-6\sqrt{3}b+45$

$=4\left\{b^2-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}b+\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2\right\}+45-\dfrac{27}{4}$

$=4\left(b-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2+\dfrac{153}{4}$

따라서, 학교의 위치는 $b=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$일 때, 즉 **변 AD를 3 : 1로 내분하는 위치**에 세우면 된다.

4 오른쪽 그림과 같이 두 구의 중심 A와 B에서 원래 직육면체 모양의 통의 가로, 세로의 길이와 높이에 평행한 선을 그어 새로운 직육면체를 만들었다.



각 변의 길이는 오른쪽 그림과 같다.

또한, 두 구의 중심 사이의 거리는 오른쪽 그림에서 직육면체의 대각선의 길이와 같으므로 $(0<r<2)$

$2r=\sqrt{(6-2r)^2+(4-2r)^2+(4-2r)^2}$

양변을 제곱하면

$4r^2=12r^2-56r+68$, $2r^2-14r+17=0$

$r=\dfrac{7\pm\sqrt{49-34}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{15}}{2}$

그런데 $0<r<2$이므로 구의 반지름의 길이는

$\mathbf{\dfrac{7-\sqrt{15}}{2}}$

시·도 경시 대비 문제

P. 148~151

1 4개 **2** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **3** $(2+\sqrt{2})\pi$cm **4** 3π

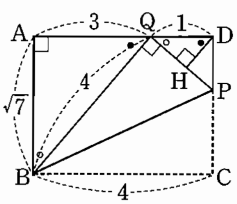
5 $30\sqrt{5}$ **6** 150° **7** $20-10\sqrt{3}$ **8** $\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$

9 $4\sqrt{6}$ **10** $\frac{\sqrt{10}}{3}$ **11** 180cm^2 **12** 153

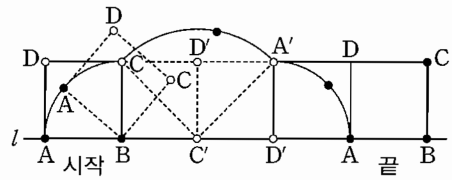
1 $A^2+2B^2=C^2$에서 $2B^2=C^2-A^2=(C+A)(C-A)$
C^2-A^2이 짝수이므로 A, C는 둘 다 짝수이거나 둘 다 홀수이고, 따라서 $C+A$와 $C-A$는 항상 짝수이다.
즉, $2B^2=$(짝수)×(짝수)이므로 4의 배수이다.
따라서, B는 짝수이다. ……㉠
또한, $0<C^2-A^2=2B^2<100$이므로 $0<B<\sqrt{50}$
$\therefore B=2, 4, 6$ ……㉡
$C+A>C-A$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢의 조건을 만족하는 경우는 다음과 같다.
(i) $B=2$일 때, $(C+A)(C-A)=8$
$C+A=4$, $C-A=2 \Rightarrow C=3$, $A=1$
(ii) $B=4$일 때, $(C+A)(C-A)=32$
$C+A=16$, $C-A=2$ 또는 $C+A=8$, $C-A=4$
$\Rightarrow C=9$, $A=7$ 또는 $C=6$, $A=2$
(iii) $B=6$일 때, $(C+A)(C-A)=72$
$C+A=12$, $C-A=6 \Rightarrow C=9$, $A=3$
(i)~(iii)에서 순서쌍 (A, B, C)는
$(1, 2, 3)$, $(7, 4, 9)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 6, 9)$의 **4개**이다.

참고
$B=6$일 때 $(C+A)(C-A)=72$에서
$C+A=36$, $C-A=2$ 또는 $C+A=18$, $C-A=4$
$\Rightarrow C=19$, $A=17$ 또는 $C=11$, $A=7$
(A 또는 C)>10이므로 조건에 맞지 않는다.

2 $\triangle$ABQ에서 $\overline{AQ}=\sqrt{\overline{BQ}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}=3$
오른쪽 그림에서
$\triangle ABQ \backsim \triangle HQD$
(AA 닮음)이므로
$\overline{AB}:\overline{HQ}=\overline{BQ}:\overline{QD}$
$\sqrt{7}:\overline{QH}=4:1$
$\therefore \overline{QH}=\frac{\sqrt{7}}{4}$



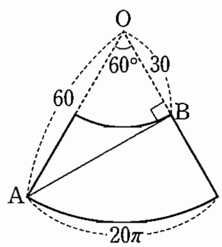
3 정사각형 ABCD를 한 바퀴 굴렸을 때, 꼭지점 A가 지나간 자취는 다음 그림과 같다.



따라서, 점 A가 지나간 곡선의 길이는
$\left(\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \pi \cdot 2\right)\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \pi \cdot 2\sqrt{2}=\mathbf{(2+\sqrt{2})\pi(cm)}$

4 바깥 테두리로 둘러싸인 도형 ABCA′의 넓이를 S라 하면 색칠한 부분의 넓이는 S에서 직각삼각형 A′B′C의 넓이를 뺀 것과 같다. 즉,
(색칠한 부분의 넓이)$=S-\triangle$A′B′C
$=S-\triangle$ABC
=(부채꼴 ACA′의 넓이)
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$이므로 색칠한 부분의 넓이는
$\pi \times 6^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ}=\mathbf{3\pi}$

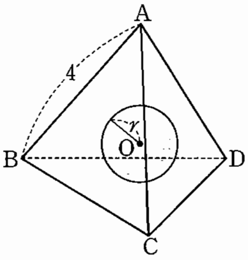
5 원뿔대의 옆면의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.
$\overline{OA}=60$, $\overline{OB}=30$,
$\angle ABO=90^\circ$이므로 $\triangle$OAB는 직각삼각형이다.
따라서, 실의 최단 거리는 $\overline{AB}$의 길이이므로
$\overline{AB}=\mathbf{30\sqrt{5}}$



6 $\triangle ABP \equiv \triangle CBQ$(SAS 합동)이므로 $\overline{AP}=\overline{CQ}$
$\angle PBQ=60^\circ$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$이므로 $\triangle$BPQ는 정삼각형이다.
$\therefore \angle BQP=60^\circ$
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이므로 $\triangle$CPQ에서
$\overline{CQ}^2=\overline{PQ}^2+\overline{CP}^2$ $\therefore \angle CPQ=90^\circ$
$\therefore \angle BQP+\angle CPQ=60^\circ+90^\circ=\mathbf{150^\circ}$

7 $\triangle ABE \equiv \triangle ADF$(RHS 합동)이고
$\overline{BE}=x\,(0<x<10)$라 하면
$\triangle$ABE에서 $\overline{AE}^2=100+x^2=\overline{EF}^2$ ……㉠
$\triangle$ECF에서 $(10-x)^2+(10-x)^2=\overline{EF}^2$ ……㉡
㉠, ㉡에서
$100+x^2=2x^2-40x+200$, $x^2-40x+100=0$
$\therefore x=20\pm 10\sqrt{3}$
그런데 $0<x<10$이므로 $x=\overline{BE}=\mathbf{20-10\sqrt{3}}$

8 오른쪽 그림에서 구의 중심을 O라 하고, 구의 반지름의 길이를 r라 하면 정사면체의 대칭성에 의하여



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

또한, 네 개의 사면체

O$-$ABC, O$-$ACD,

O$-$ABD, O$-$BCD는 서로 합동이다.

정사면체의 높이를 h라 하면

(O$-$ABC의 부피)

$=\frac{1}{3}\times(\triangle ABC\times r)=\frac{1}{4}\times$(A$-$BCD의 부피)

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times(\triangle ABC)\times h$

$\therefore r=\frac{1}{4}h=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times 4=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서, 구의 부피는 $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi}$

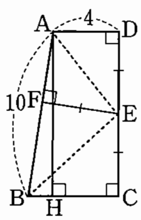
참고

정사면체의 높이와 부피

한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 높이를 h, 부피를 V라 하면

① $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ② $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

9 오른쪽 그림에서



$\triangle ADE\equiv\triangle AFE$ (RHS 합동),

$\triangle FBE\equiv\triangle CBE$ (RHS 합동)

$\therefore \overline{AF}=\overline{AD}=4$, $\overline{BF}=\overline{BC}=6$

꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 ABH에서 $\overline{BH}=2$이므로

$\overline{AH}=\overline{DC}=\sqrt{10^2-2^2}=\boldsymbol{4\sqrt{6}}$

10 $\triangle ABD\equiv\triangle CAE$ (RHA 합동)이므로

$\overline{AD}=1$ $\therefore \overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{10}$

$\triangle BDF\backsim\triangle CEF$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BD}:\overline{CE}=\overline{BF}:\overline{CF}$

$2:1=(\sqrt{10}-\overline{CF}):\overline{CF}$, $2\overline{CF}=\sqrt{10}-\overline{CF}$

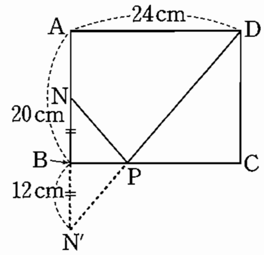
$3\overline{CF}=\sqrt{10}$ $\therefore \overline{CF}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

11 $\overline{DP}+\overline{NP}$가 최소가 되는 것은 $\overline{DN'}$가 직선이 될 때이다. 이 때,

$\overline{DP}+\overline{NP}=\overline{DP}+\overline{N'P}$

$=\overline{DN'}$

이므로



$\overline{DN'}=\sqrt{24^2+32^2}$

$=\sqrt{576+1024}$

$=\sqrt{1600}=40$(cm)

$\triangle BPN'\backsim\triangle CPD$

(AA 닮음)이므로

$\overline{BN'}:\overline{CD}=\overline{BP}:\overline{CP}$,

$12:20=\overline{BP}:(24-\overline{BP})$

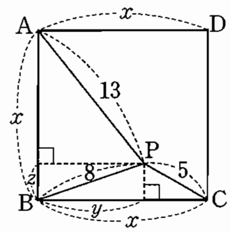
$20\,\overline{BP}=12(24-\overline{BP})$ $\therefore \overline{BP}=9$(cm)

$\therefore \triangle DNP=\triangle AN'D-\triangle AND-\triangle NN'P$

$=\frac{1}{2}(24\times 32-24\times 8-24\times 9)$

$=\mathbf{180(cm^2)}$

12 오른쪽 그림에서



$\begin{cases}(x-z)^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots㉠\\ y^2+z^2=8^2 & \cdots\cdots㉡\\ (x-y)^2+z^2=5^2 & \cdots\cdots㉢\end{cases}$

㉠$-$㉡에서

$x^2-2xz=105$

$\therefore 2xz=x^2-105$ ……㉣

㉡$-$㉢에서

$-x^2+2xy=39$

$\therefore 2xy=x^2+39$ ……㉤

㉣^{2}+㉤^{2}에서

$4x^2z^2+4x^2y^2=(x^2-105)^2+(x^2+39)^2$

$4x^2(y^2+z^2)=2x^4-132x^2+105^2+39^2$

㉡에서 $y^2+z^2=8^2$이므로

$x^4-194x^2+6273=0$, $(x^2-153)(x^2-41)=0$

㉣에서 $x^2>105$이므로 $x^2=153$

따라서, 정사각형 ABCD의 넓이는 **153**이다.

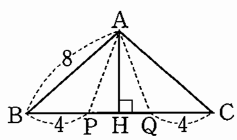
P. 152~153

대비 문제

1 $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ **2** $\frac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **3** $\frac{46}{3}\sqrt{2}$

4 $(48-24\sqrt{3})\pi$

1 오른쪽 그림과 같이 꼭지점 A에서 밑면 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

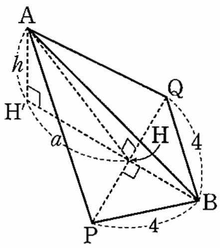


$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{64-36}=2\sqrt{7}$

$\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{7})^2}=4\sqrt{2}$

따라서, 만들어진 삼각뿔 A−BPQ는 밑면이 한 변의 길이가 4인 정삼각형인 삼각뿔이다.



오른쪽 그림에서

$\overline{BH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

$\overline{AH'}=h$, $\overline{H'H}=a$라 하면

△AH′H에서

$\overline{AH'}^2=\overline{AH}^2-\overline{H'H}^2$

$h^2=(2\sqrt{7})^2-a^2$ ……㉠

△AH′B에서

$\overline{AH'}^2=\overline{AB}^2-\overline{H'B}^2$, $h^2=8^2-(a+2\sqrt{3})^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $28-a^2=64-a^2-4\sqrt{3}a-12$

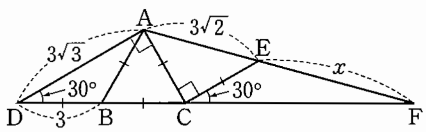
$4\sqrt{3}a=24$ $\quad\therefore a=2\sqrt{3}$ ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $h^2=16$ $\quad\therefore h=4\ (\because h>0)$

따라서, A−BPQ의 부피는

$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2\right)\cdot4=\mathbf{\dfrac{16}{3}\sqrt{3}}$

2



△ABC는 정삼각형이고 ∠ADB=∠DAB=30°이므로 ∠DAC=90°

$\therefore \overline{DA}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

또한, ∠ACB+∠ACE+∠ECF=180°이므로

60°+90°+∠ECF=180° $\quad\therefore$ ∠ECF=30°

따라서, △ADF∽△ECF(AA 닮음)이고,

$\overline{AE}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{EF}=x$라 하면

$\overline{AD}:\overline{EC}=\overline{AF}:\overline{EF}$, $3\sqrt{3}:3=(3\sqrt{2}+x):x$

$3\sqrt{3}x=3(3\sqrt{2}+x)$ $\quad\therefore x=\mathbf{\dfrac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

3 $\overline{AG}$는 △EFG에 수직이므로 ∠AGE=∠AGF=90°

따라서, △AEG와 △AFG에서

$\overline{EG}=\overline{FG}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

또한, △AEF는 정삼각형이므로 $\overline{EF}=4$

따라서, △EFG는 이등변삼각형이므로 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

∴ (사면체 A−EFG의 부피)

$=\dfrac{1}{3}\times\triangle EFG\times\overline{AG}$

$=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times2=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

따라서, 구하는 입체도형의 부피는

(사면체 A−BCD의 부피)−(사면체 A−EFG의 부피)

$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times6^3-\dfrac{8}{3}\sqrt{2}=18\sqrt{2}-\dfrac{8}{3}\sqrt{2}=\mathbf{\dfrac{46}{3}\sqrt{2}}$

4 ∠BAD=∠CAD이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$이므로

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AB}=2x$

$(2x)^2=12^2+x^2$에서 $x=4\sqrt{3}$

내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})$

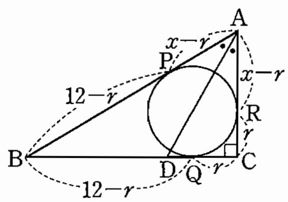
$=\dfrac{1}{2}r\times(8\sqrt{3}+12+4\sqrt{3})$

$\therefore r=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=6-2\sqrt{3}$

따라서, 내접원의 넓이는

$\pi\times(6-2\sqrt{3})^2=\mathbf{(48-24\sqrt{3})\pi}$

다른풀이



오른쪽 그림과 같이 내접원이 △ABC의 세 변 AB, BC, AC와 만나는 점을 차례로 P, Q, R라 하고 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\overline{CQ}=\overline{CR}$,

$\overline{AP}=\overline{AR}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$이고

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=8:4=2:1$이므로

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AB}=2x$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=(x-r)+(12-r)=2x$

따라서, $x=12-2r=\overline{AC}$이므로 $\overline{AB}=2\overline{AC}=24-4r$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이므로

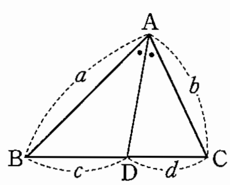
$(24-4r)^2=12^2+(12-2r)^2$, $r^2-12r+24=0$

$\therefore r=6-2\sqrt{3}\ (\because 0<r<4)$

따라서, 내접원의 넓이는

$\pi\times(6-2\sqrt{3})^2=\mathbf{(48-24\sqrt{3})\pi}$

참고



△ABC에서 ∠A의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $a:b=c:d$

원의 성질

특목고 대비 문제

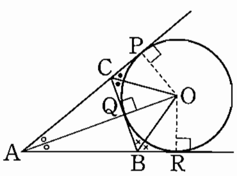
P. 158~175

1 70° **2** 15cm **3** 풀이 참조 **4** 30
5 $5\sqrt{2}$cm **6** $\frac{72}{5}$ cm **7** ③ **8** 15cm
9 6cm **10** ④ **11** $\sqrt{15}$ **12** 4cm **13** 3
14 ② **15** $\frac{9}{4}$ cm **16** 풀이 참조 **17** ②
18 풀이 참조 **19** 풀이 참조 **20** ④
21 150° **22** 45° **23** $2\sqrt{46}$ **24** ⑤ **25** ③
26 ⑤ **27** ⑤ **28** ③ **29** $6\sqrt{26}$ **30** pq
31 ③ **32** 65° **33** 57° **34** ⑤ **35** $\frac{5}{7}$
36 $8\sqrt{2}$ **37** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **38** $\frac{45}{2}\pi\text{cm}^2$ **39** 5cm
40 $\frac{24}{5}$ **41** 6 **42** 7 **43** 7 **44** 풀이 참조
45 풀이 참조 **46** 풀이 참조 **47** $\sqrt{166}$
48 ① **49** 풀이 참조 **50** 10πcm **51** $\frac{16}{3}$ cm
52 $\frac{9}{2}$ **53** 32cm^2, $2(\sqrt{5}-1)$cm **54** 풀이 참조

1 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로
$\overline{AB}=\overline{AC}$
따라서, △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.
$\therefore \angle B=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=\mathbf{70°}$

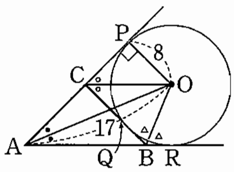
2 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로
$\overline{AM}=\overline{BM}$
따라서, $\overline{AM}=12$cm이고 △OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여 원의 반지름 $\overline{OA}$는
$\overline{OA}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=\mathbf{15(cm)}$

3 ∠B, ∠C의 외각의 이등분선의 교점을 O라 하자.
점 O에서 오른쪽 그림과 같이 변 AC, BC, AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하면



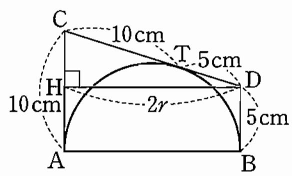
$\triangle OCP\equiv\triangle OCQ$(RHA 합동),
$\triangle OBQ\equiv\triangle OBR$(RHA 합동)이므로
$\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}$
또한, 두 직각삼각형 △APO와 △ARO에서
$\overline{OP}=\overline{OR}$, $\overline{OA}$는 공통
$\therefore \triangle APO\equiv\triangle ARO$(RHS 합동)
$\therefore \angle OAP=\angle OAR$
따라서, △ABC에서 ∠A의 이등분선과 ∠B, ∠C의 외각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

4 직각삼각형 AOP에서
$\overline{AP}=\sqrt{17^2-8^2}=15$
점 O를 중심, $\overline{OP}$의 길이를 반지름으로 하는 원과 변 BC와의 접점의 좌표를 Q, $\overline{AB}$의 연장선과의 접점을 R라 하면



$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{CQ}=\overline{BR}+\overline{CP}$
∴ (△ABC의 둘레의 길이)
$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$
$=(\overline{AB}+\overline{BQ})+(\overline{CQ}+\overline{AC})$
$=\overline{AR}+\overline{AP}$
$=2\overline{AP}=\mathbf{30}$

5 점 D를 지나고 지름 AB에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 H라 하면



$\overline{CH}=5$ cm,
$\overline{CD}=15$ cm이고 △CHD는 직각삼각형이다.
반지름의 길이를 r라 하면
$15^2=5^2+(2r)^2$
$\therefore r=\mathbf{5\sqrt{2}(cm)}$

6 △AOO′는 피타고라스의 정리의 역에 의하여 직각삼각형이다.
중심선과 공통현의 교점을 M이라 하고 △AOO′의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times9\times12=\frac{1}{2}\times15\times\overline{AM}$
$\therefore \overline{AM}=\frac{36}{5}$(cm)
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=\mathbf{\frac{72}{5}(cm)}$

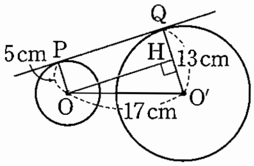
7 큰 원의 반지름의 길이를 r, 작은 원의 반지름의 길이를 r'라고 하면

$r+r'=16,\ r-r'=4$

$\therefore r=10(\text{cm})$

8 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{QO'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HO'}=8\text{cm}$

$\overline{PQ}=\overline{OH}$이고 $\triangle OO'H$는 직각삼각형이므로 공통외접선 PQ의 길이는

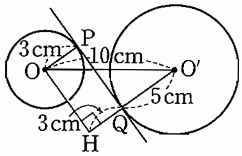


$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{HO'}^2}=\sqrt{17^2-8^2}=\mathbf{15(cm)}$

9 점 O에서 $\overline{O'Q}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HQ}=3\text{cm}$

$\overline{PQ}=\overline{OH}$이고 $\triangle OHO'$는 직각삼각형이므로 공통내접선 PQ의 길이는



$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{HO'}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\mathbf{6(cm)}$

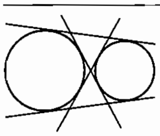
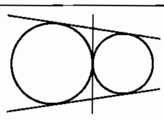
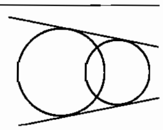
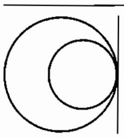
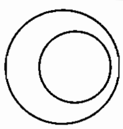
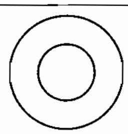
10 두 원의 위치 관계에 따른 공통접선의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

두 원의 위치 관계	외접선의 개수	내접선의 개수	접선의 총 개수
외부에 있다.	2	2	4
외접한다.	2	1	3
두 점에서 만난다.	2	0	2
내접한다.	1	0	1
내부에 있다.	0	0	0

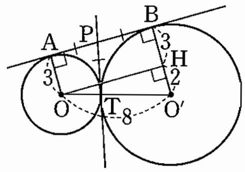
① 2개 ② 1개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

참고

두 원의 위치 관계와 공통접선의 개수

외부에 있다.	외접한다.	두 점에서 만난다.
		
공통외접선 2개 공통내접선 2개	공통외접선 2개 공통내접선 1개	공통외접선 2개 공통내접선 0개
내접한다.	**내부에 있다.**	**동심원**
		
공통외접선 1개 공통내접선 0개	공통접선 0개	공통접선 0개

11 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 길이는 같으므로



$\overline{PA}=\overline{PT}=\overline{PB}$

오른쪽 그림에서

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{8^2-2^2}$

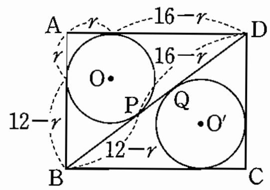
$=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

$\therefore \overline{PT}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\mathbf{\sqrt{15}}$

12 $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}$

$=\sqrt{12^2+16^2}$

$=20(\text{cm})$



두 원 O, O'는 합동이고 반지름의 길이를 r라 하면

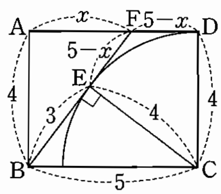
오른쪽 그림과 같이

$\overline{BD}=\overline{BP}+\overline{DP}=(12-r)+(16-r)=20$

$\therefore r=4(\text{cm})$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{DP}-\overline{DQ}=12-8=\mathbf{4(cm)}$

13 점 E와 점 C를 이으면



$\overline{EC}=4$

$\therefore \overline{EB}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\overline{AF}=x$라 하면

$\overline{FD}=\overline{FE}=5-x$

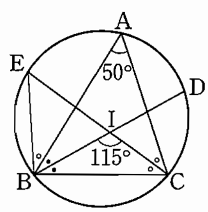
직각삼각형 ABF에서

$\overline{AF}^2+\overline{AB}^2=\overline{BF}^2$

$x^2+4^2=(3+5-x)^2$

$\therefore x=\mathbf{3}$

14 $\angle BIC=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A=115^\circ$



$\triangle IBC$에서

$\angle I+\dfrac{1}{2}\angle B+\dfrac{1}{2}\angle C=180^\circ$

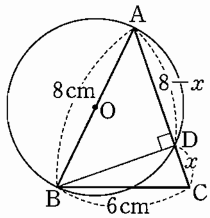
$\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=65^\circ=\angle EBD$

호 EAD에 대한 원주각 $\angle EBD=65^\circ$이므로 그 중심각의 크기는 $65^\circ\times 2=130^\circ$이다.

따라서, 호 EAD의 길이는

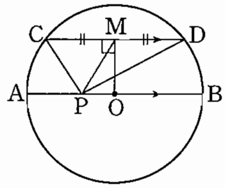
$2\times\pi\times 9\times\dfrac{130^\circ}{360^\circ}=\mathbf{\dfrac{13}{2}\pi(cm)}$

15 점 B와 점 D를 이으면
$\overline{AB}$가 지름이므로
$\angle ADB=90^\circ$
두 직각삼각형 ABD와 BCD에서 $\overline{CD}=x$라 하면



$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{BC}^2-\overline{CD}^2$
$=8^2-(8-x)^2=6^2-x^2$
$64-64+16x-x^2=36-x^2$
$\therefore x=\mathbf{\frac{9}{4}(cm)}$

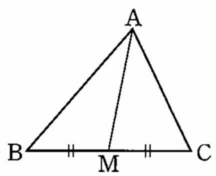
16 원의 중심 O에서 현 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{CM}=\overline{DM}$



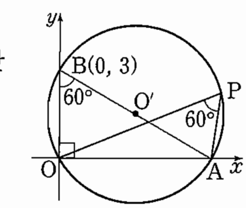
파포스의 정리에 의하여
$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$
$=2(\overline{CM}^2+\overline{PM}^2)$
$=2\{(\overline{CO}^2-\overline{OM}^2)+(\overline{OP}^2+\overline{OM}^2)\}$
$=2(\overline{CO}^2+\overline{OP}^2)=2(\overline{AO}^2+\overline{OP}^2)$
$=(\overline{AO}+\overline{OP})^2+(\overline{AO}-\overline{OP})^2$
$=(\overline{AO}-\overline{OP})^2+(\overline{BO}+\overline{OP})^2$
$=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

참고

파포스(Pappos)의 정리
△ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 하면
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

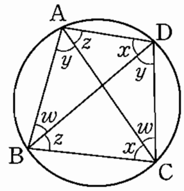


17 $\angle AOB=90^\circ$이므로 $\overline{AB}$는 원의 지름이 되고 $\overset{\frown}{OA}$에 대한 원주각이 같으므로
$\angle ABO=\angle APO=60^\circ$
따라서, $\overline{OB}:\overline{OA}=1:\sqrt{3}$이므로



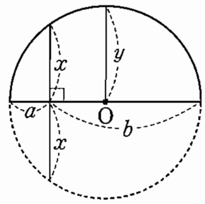
$\overline{OA}=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore A(3\sqrt{3},\ 0)$
$\overline{AB}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$이므로 원 O′의 반지름의 길이는 3이다.
이 때, 색칠한 부분의 넓이는 반원 AOB의 넓이에서 △AOB의 넓이를 뺀 것이므로 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times\pi\times3^2-\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3=\mathbf{\frac{9}{2}(\pi-\sqrt{3})}$

18 오른쪽 그림에서
$\angle ADB=\angle ACB=x$,
$\angle BAC=\angle BDC=y$,
$\angle CBD=\angle CAD=z$,
$\angle ABD=\angle ACD=w$라 할 때,



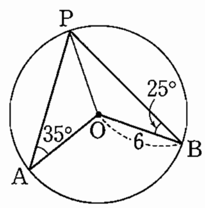
$2(x+y+z+w)=360^\circ$
$\therefore x+y+z+w=180^\circ$
$\therefore \angle A+\angle C=\angle B+\angle D=x+y+z+w=180^\circ$

19 오른쪽 그림에서 $x^2=ab$
$\therefore x=\sqrt{ab}$ ($\because x>0$)
$2y=a+b \qquad \therefore y=\frac{a+b}{2}$
따라서, $y\geq x$이므로



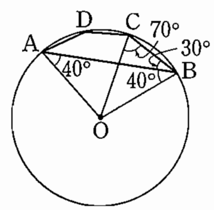
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

20 △OPA와 △OPB는 모두 이등변삼각형이다.
$\angle AOB=2\angle APB$
$=2(35^\circ+25^\circ)=120^\circ$
따라서, 부채꼴 OAB의 넓이는



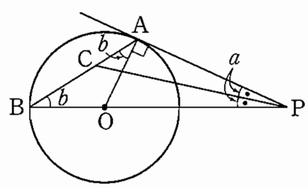
$\pi\times6^2\times\frac{120^\circ}{360^\circ}=\mathbf{12\pi}$

21 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 △AOB는 이등변삼각형이다.
$\therefore \angle OBA=40^\circ$
또한, $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로
△OBC도 이등변삼각형이다.
$\therefore \angle ABC=70^\circ-40^\circ=30^\circ$



그런데 □ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로
$\angle ADC+\angle ABC=180^\circ$
$\therefore \angle ADC=180^\circ-30^\circ=\mathbf{150^\circ}$

22 점 A와 점 O를 이으면 $\angle OAP=90^\circ$
$\angle APC=\angle OPC$
$=a$,
$\angle OAB=\angle OBA=b$
라 하면

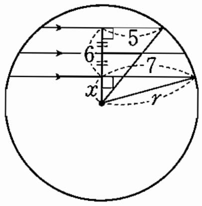


△ABP에서 $90^\circ+2(a+b)=180^\circ \qquad \therefore a+b=45^\circ$
그런데 △CBP에서 $\angle PCA=\angle CPB+\angle CBP$이므로
$\angle PCA=a+b=\mathbf{45^\circ}$

23 두 가지 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

즉, 주어진 두 현과 평행한 지름에 대해서 두 현이 같은 쪽에 놓이는 경우와 서로 다른 쪽에 놓이는 경우가 있다.

(i) 두 현이 같은 쪽에 놓이는 경우는 오른쪽 그림에서

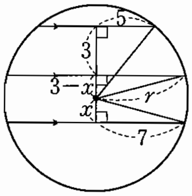


$\begin{cases} r^2-(x+6)^2=5^2 \\ r^2-x^2=7^2 \end{cases}$

연립방정식을 풀면

$x=-1$이므로 모순이다.

(ii) 두 현이 서로 다른 쪽에 놓이는 경우는 오른쪽 그림에서



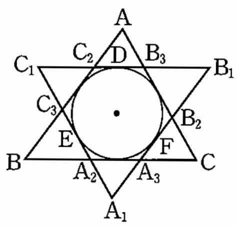
$\begin{cases} r^2-(6-x)^2=5^2 \\ r^2-x^2=7^2 \end{cases}$

연립방정식을 풀면

$x=1$이고 원의 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$이다.

따라서, 구하는 현의 길이는 $2\sqrt{50-(3-1)^2}=\mathbf{2\sqrt{46}}$

24 오른쪽 그림에서



$\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle A_1B_1C_1$이므로

$$\frac{r_1}{r}=\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{A_3A_2}}{\overline{B_1C_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{C_1A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_1}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1E}+\overline{A_1F}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}}$$

같은 방법으로

$$\frac{r_2}{r}=\frac{\overline{B_1D}+\overline{B_1F}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}},$$

$$\frac{r_3}{r}=\frac{\overline{C_1D}+\overline{C_1E}}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}}$$

이상에서

$$\frac{r_1+r_2+r_3}{r}$$

$$=\frac{(\overline{A_1F}+\overline{B_1F})+(\overline{B_1D}+\overline{C_1D})+(\overline{C_1E}+\overline{A_1E})}{\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}}=\mathbf{1}$$

참고

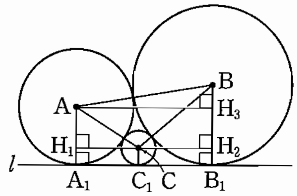
가비의 리

$a:b=c:d=e:f$, 즉 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$$

25 오른쪽 그림의 세 점 A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 차례로 A_1, B_1, C_1이라 하고, 점 C에서 $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, 점 A에서 $\overline{BB_1}$에 내린 수선의 발을 H_3이라고 하자.



$\overline{A_1C_1}^2=\overline{H_1C}^2=\overline{AC}^2-\overline{AH_1}^2$

$\qquad=(a+c)^2-(a-c)^2=4ac$

$\overline{B_1C_1}^2=\overline{H_2C}^2=\overline{BC}^2-\overline{BH_2}^2$

$\qquad=(b+c)^2-(b-c)^2=4bc$

$\overline{A_1B_1}^2=\overline{AH_3}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH_3}^2$

$\qquad=(a+b)^2-(b-a)^2=4ab$

$\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}=\overline{A_1B_1}$이므로

$\sqrt{4ac}+\sqrt{4bc}=\sqrt{4ab}$, $\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=\sqrt{ab}$ ······㉠

㉠의 양변을 $\sqrt{abc}$로 나누면 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$

26 접선과 현이 이루는 각에 의하여 $\angle TBA=\angle ATP$

그런데 $\angle TPA=\angle TBA$이므로 $\angle ATP=\angle TPA$

따라서, $\triangle APT$는 이등변삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{AT}=5$

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $\overline{PT}=x$라 하면

$x^2=5\times15 \qquad \therefore x=\mathbf{5\sqrt{3}}$

27 $\overline{PA}=\overline{AQ}=\overline{QB}=a$라고 하면

$\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=\overline{CQ}\cdot\overline{TQ}$에서 $a^2=8$

또한, $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $\overline{PT}=x$라 하면

$x^2=a\cdot3a=3a^2=24 \qquad \therefore x=\mathbf{2\sqrt{6}}$

28 ① $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=4\cdot9=36 \qquad \therefore \overline{PT}=6$

② $\overline{PT}^2=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로 $36=3\cdot\overline{PD} \qquad \therefore \overline{PD}=12$

③ $\overline{CD}=\overline{PD}-\overline{PC}=12-3=9$

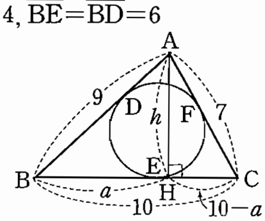
④ ①, ②에서 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

⑤ ④에 의하여 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

29 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{AF}=\overline{AD}=3$, $\overline{CF}=\overline{CE}=4$, $\overline{BE}=\overline{BD}=6$

꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고,



$\overline{BH}=a$, $\overline{CH}=10-a$,

$\overline{AH}=h$라 하면

피타고라스의 정리에 의하여

$h^2=9^2-a^2=7^2-(10-a)^2$ ······㉠

$81-a^2=49-100+20a-a^2$

$20a=132 \quad \therefore a=\dfrac{33}{5}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$h^2=9^2-\dfrac{33^2}{5^2}=\dfrac{(9\cdot5)^2-33^2}{5^2} \quad \therefore h=\dfrac{6\sqrt{26}}{5}$

따라서, △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot\dfrac{6\sqrt{26}}{5}=\mathbf{6\sqrt{26}}$

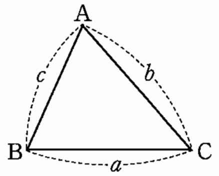
참고

헤론(Heron)의 공식

△ABC의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 라 하면

△ABC의 넓이 S는

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



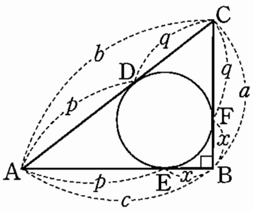
29번과 같이 삼각형의 세 변의 길이를 알면 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

$a=10$, $b=7$, $c=9$이므로 $s=\dfrac{10+7+9}{2}=13$

따라서, △ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\sqrt{13\times3\times6\times4}=\mathbf{6\sqrt{26}}$

30 오른쪽 그림과 같이 $\overline{EB}=\overline{FB}=x$라 하고, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하면



△ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ac$이고,

$a=q+x$, $b=p+q$, $c=p+x$에서 $x=\dfrac{a-b+c}{2}$

따라서, $p=c-x=\dfrac{-a+b+c}{2}=\dfrac{b-(a-c)}{2}$,

$q=a-x=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{b+(a-c)}{2}$이므로

$pq=\dfrac{b^2-(a-c)^2}{4}$

$\quad=\dfrac{b^2-a^2-c^2+2ac}{4}$

$\quad=\dfrac{1}{2}ac \ (\because b^2=a^2+c^2)$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}ac=\boldsymbol{pq}$

다른풀이

$b^2=a^2+c^2$에서 $(p+q)^2=(p+x)^2+(q+x)^2$을 정리하면

$pq=x^2+px+qx$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{1}{2}(x+p)(x+q)$

$\qquad=\dfrac{1}{2}(x^2+px+qx+pq)=\dfrac{1}{2}\times(pq+pq)=\boldsymbol{pq}$

31 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{AF}=\overline{AC}+\overline{CF}=5+\overline{CD}$

$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=3+\overline{BD}$

그런데 $\overline{AF}=\overline{AE}$이므로 $5+\overline{CD}=3+\overline{BD}$

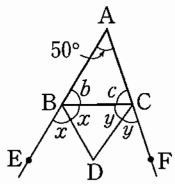
$\overline{BD}-\overline{CD}=2$이고, $\overline{BD}+\overline{CD}=4$이므로

$\overline{BD}=\mathbf{3}=\overline{BE}$

32 $\angle ABC=b$, $\angle ACB=c$,

$\angle DBE=\angle DBC=x$,

$\angle DCF=\angle DCB=y$라 하면



$50^\circ+b+c=180^\circ$이므로

$b+c=130^\circ$

$b+2x=180^\circ$, $c+2y=180^\circ$이므로

$b+c+2(x+y)=360^\circ \quad \therefore x+y=115^\circ$

$\therefore \angle BDC=180^\circ-(x+y)=\mathbf{65^\circ}$

33 원주각은 호의 길이에 비례하므로

$\overset{\frown}{AC}=3\overset{\frown}{CD}$에서 $\angle ADB=3\angle DBC$ ……㉠

△BED에서 $\angle DBE+\angle DEB=\angle ADB$ ……㉡

$\angle ADB=x^\circ$라 하면

$\dfrac{1}{3}x^\circ+38^\circ=x^\circ$, $\dfrac{2}{3}x^\circ=38^\circ \quad \therefore x^\circ=\mathbf{57^\circ}$

34 △ABC의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=(\overline{AE}+\overline{BE})+(\overline{BI}+\overline{CI})+(\overline{CM}+\overline{AM})$ ……㉠

△ADN의 둘레의 길이는

$\overline{AD}+\overline{DN}+\overline{NA}$

$=(\overline{AD}+\overline{DP})+(\overline{NP}+\overline{NA})$

$=(\overline{AD}+\overline{DE})+(\overline{NM}+\overline{NA})$

$=\overline{AE}+\overline{AM}$ ……㉡

같은 방법으로 △BHF의 둘레의 길이를 구하면

$\overline{BE}+\overline{BI}$ ……㉢

△CLJ의 둘레의 길이를 구하면 $\overline{CI}+\overline{CM}$ ……㉣

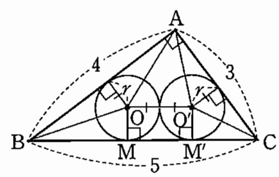
㉠=㉡+㉢+㉣이므로 세 삼각형 ADN, BHF, CLJ의 둘레의 길이의 합은 △ABC의 둘레의 길이와 같다.

$\therefore \mathbf{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

35 $3^2+4^2=5^2$이므로

$\angle A=90^\circ$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$



점 A에서 변 BC에 내린 수선의 길이를 h라 하면

$6=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h \qquad \therefore h=\frac{12}{5}$

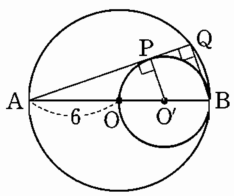
$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle O'CA+(\triangle OBM+\triangle O'CM')$
$\qquad +\triangle AOO'+\square OMM'O'$

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$6=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot r+\frac{1}{2}\cdot(5-2r)\cdot r$
$\qquad +\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot\left(\frac{12}{5}-r\right)+2r\cdot r$

$\therefore r=\mathbf{\frac{5}{7}}$

36 $\overleftrightarrow{AP}$가 원 O′의 접선이므로



$\angle APO'=90^\circ$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{\overline{AO'}^2-\overline{PO'}^2}$
$\qquad =\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$

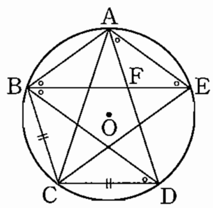
또한, $\angle AQB=90^\circ$이므로

$\triangle APO' \backsim \triangle AQB$ (AA 닮음)

$\overline{AO'}:\overline{AB}=\overline{AP}:\overline{AQ}$, $9:12=6\sqrt{2}:\overline{AQ}$

$\therefore \overline{AQ}=\mathbf{8\sqrt{2}}$

37 $\angle ABF=\angle AEF$



$=\angle EAF$(원주각)이므로

$\triangle ABE \backsim \triangle FEA$

$\overline{BE}:\overline{AE}=\overline{AE}:\overline{FE}$

($\because \overline{FA}=\overline{FE}$)이므로

$\overline{AE}^2=\overline{BE}\cdot\overline{FE}$

$\qquad =(\overline{BF}+\overline{FE})\cdot\overline{FE}$ ······㉠

$\square BCDF$는 평행사변형이므로

$\overline{BF}=\overline{CD}=\overline{AE}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BF}^2=\overline{BF}\cdot\overline{FE}+\overline{FE}^2$이고 ······㉢

㉢의 양변을 $\overline{BF}^2$으로 나누면 $\left(\frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}\right)^2+\frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}-1=0$

$\therefore \frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $\frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}>0$이므로 $\frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

38 $\angle CAO=\angle CBO=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$

$\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OB}=\overline{OE}$이므로 $\triangle OAD$와 $\triangle OBE$는 이등변삼각형이다.

$\therefore \angle AOD=\angle BOE=180^\circ-70^\circ\times 2=40^\circ$

따라서, $\angle DOE=100^\circ$이므로 부채꼴 DOE의 넓이는

$\pi\times 9^2\times\frac{100^\circ}{360^\circ}=\mathbf{\frac{45}{2}\pi(cm^2)}$

참고

점 D와 점 B를 이으면 $\angle ADB=\angle CDB=90^\circ$

$\angle DBC=\angle DBE=180^\circ-(40^\circ+90^\circ)=50^\circ$이므로

그 중심각인 $\angle DOE=50^\circ\times 2=100^\circ$

39 $\overline{QA}\cdot\overline{QB}=\overline{QC}\cdot\overline{QT}$이므로

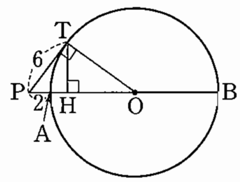
$\overline{QA}\cdot 4=6\cdot 2 \qquad \therefore \overline{QA}=3$ cm

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}=x$ cm라 하면

$(2\sqrt{15})^2=x(x+7)$, $x^2+7x-60=0$

$(x+12)(x-5)=0 \qquad \therefore x=\mathbf{5cm}$ ($\because x>0$)

40 원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 TPO에서



$(r+2)^2=r^2+36$,

$4r=32 \qquad \therefore r=8$

점 T에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle TPO=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{TH}=\frac{1}{2}\times 6\times 8$

$\therefore \overline{TH}=\mathbf{\frac{24}{5}}$

41 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle OBE$에서

$r^2=(r-2)^2+4^2 \qquad \therefore r=5$

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로 $\angle BOC=\angle COD$

$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOB=\angle BOC$

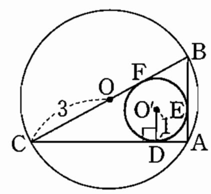
$\angle ADB=\angle OEB=90^\circ$

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle OBE$ (AA 닮음)

$\overline{AD}:\overline{OE}=\overline{AB}:\overline{OB}$

$\overline{AD}:3=10:5 \qquad \therefore \overline{AD}=\mathbf{6}$

42 $\angle A$는 평각에 대한 원주각이므로 직각이고 따라서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.



$\overline{BE}=\overline{BF}=a$라 하면

$\overline{AB}=a+1$

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{FC}$
$\qquad =a+(6-a)=6$

$\overline{CA}=\overline{CD}+\overline{DA}=(6-a)+1=7-a$

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+1)^2+(7-a)^2=6^2$, $a^2-6a+7=0$

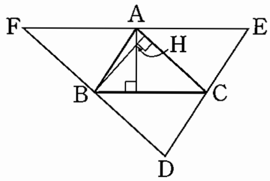
$\therefore a=3-\sqrt{2}$ ($\because 0<a<3$)

$\therefore \overline{AB}=4-\sqrt{2}$, $\overline{CA}=4+\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})=\mathbf{7}$

43 두 원 O, O′의 반지름의 길이의 비가 $3:2$이므로 두 원의 반지름의 길이를 각각 $3x$, $2x$ $(x\neq 0)$라 하면
두 직각삼각형 OAB와 O′BA에서
$(3+3x)^2-(3x)^2=\overline{AB}^2=(4+2x)^2-(2x)^2$,
$2x=7 \quad \therefore x=\frac{7}{2}$
따라서, 원 O′의 반지름의 길이는 $2x=\mathbf{7}$

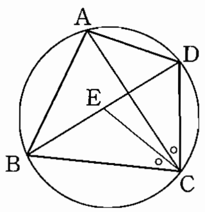
44 △ABC의 두 꼭지점 A와 B에서 대변에 내린 수선의 교점을 H라 하자.



오른쪽 그림과 같이 삼각형의 각 꼭지점을 지나고, 그 대변에 평행한 세 직선의 교점을 각각 D, E, F라 하면 $\overline{AH}$는 $\overline{EF}$의 수직이등분선이고, $\overline{BH}$는 $\overline{DF}$의 수직이등분선이므로 교점 H는 △DEF의 외심이다.
따라서, $\overline{CH}\perp\overline{DE}$이므로 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$

45 △ABD와 △AEC에서
∠ABD=∠AEC(원주각),
∠ADB=∠ACE=90°이므로
△ABD∽△AEC (AA 닮음)
$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AC}$이므로 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$

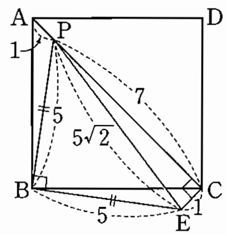
46 오른쪽 그림에서 대각선 BD 위에 ∠ACD=∠ECB가 되도록 점 E를 잡으면



∠DAC=∠DBC(원주각)
이므로
△DAC∽△EBC(AA 닮음)
$\overline{AD}:\overline{BE}=\overline{AC}:\overline{BC}$이므로
$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{BE}\cdot\overline{AC}$ ……㉠
△DCE와 △ACB에서
∠CDE=∠CAB(원주각)
∠DCE=∠ACB (∵ ∠ACD=∠ECB)이므로
△DCE∽△ACB (AA 닮음)
$\overline{DE}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{AC}$이므로
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{DE}\cdot\overline{AC}$ ……㉡
㉠, ㉡에서
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}(\overline{BE}+\overline{DE})=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

47 $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=\overline{OB}\cdot\overline{OD}$이므로 □ABCD는 원에 내접하는 사각형이다.
∠BAC=∠BDC(원주각), ∠AOB=∠DOC(맞꼭지각)
이므로 △AOB∽△DOC (AA 닮음)
$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{DC}$, $8:6=6:\overline{DC}$ $\quad\therefore \overline{DC}=\frac{9}{2}$
같은 방법으로 △AOD∽△BOC (AA 닮음)
$\overline{AO}:\overline{BO}=8:4=2:1$이므로
$\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{BC}=\frac{1}{2}x$
따라서, 톨레미의 정리에 의해서
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$
$6\times\frac{9}{2}+x\times\frac{1}{2}x=11\times 10$, $\frac{1}{2}x^2=83$
$\therefore x=\mathbf{\sqrt{166}}$ $(\because x>0)$

48 점 B에서 $\overline{BE}\perp\overline{BP}$, $\overline{BE}=\overline{BP}$가 되도록 점 E를 잡으면 △PBE는 직각이등변삼각형이고 $\overline{PE}=5\sqrt{2}$



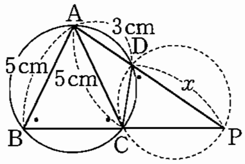
한편, △ABP≡△CBE
(SAS 합동)이므로
$\overline{CE}=\overline{AP}=1$
$\overline{PE}^2=\overline{PB}^2+\overline{BE}^2=25+25=49+1=\overline{PC}^2+\overline{CE}^2$
$\therefore$ ∠PCE=90°
따라서, ∠PBE+∠PCE=180°이므로 네 점 B, E, C, P는 한 원 위의 점이다.
톨레미의 정리를 이용하면
$\overline{BE}\cdot\overline{PC}+\overline{BP}\cdot\overline{CE}=\overline{PE}\cdot\overline{BC}$이므로
$5\times 7+5\times 1=5\sqrt{2}\times\overline{BC}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

다른풀이
직각이등변삼각형 ABC에서
$\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\overline{BC}$이므로 $\overline{BC}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

49 △ABD와 △AEC에서
∠BAD=∠EAC, ∠ABD=∠AEC(원주각)이므로
△ABD∽△AEC (AA 닮음)
$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AC}$이므로 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}$

50 ∠ABD=∠CBD이므로 $\widehat{AD}=\widehat{CD}$
∠ACE=∠BCE이므로 $\widehat{AE}=\widehat{BE}$
$\widehat{BC}$에 대한 원주각 ∠BAC=30°이므로 그 중심각의 크기는 60°이다.
원주의 길이가 $2\times\pi\times 12=24\pi$ (cm)이므로
$\widehat{BC}+2\widehat{AD}+2\widehat{AE}=24\pi$ (cm)
$2(\widehat{AD}+\widehat{AE})=24\pi-24\pi\times\frac{60°}{360°}=20\pi$ (cm)
∴ (호 EAD의 길이)$=\mathbf{10\pi}$**(cm)**

51 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로



$\angle ABC=\angle ACB$

보조선 $\overline{CD}$를 그으면

$\angle CDP=\angle ABC$

$\therefore \angle ACB=\angle CDP$ ······㉠

$\triangle ACP$에서

$\angle ACB=\angle CAP+\angle APC$ ······㉡

또한, $\triangle ACD$에서

$\angle CDP=\angle CAD+\angle ACD$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\angle CAP+\angle APC=\angle CAD+\angle ACD$이므로

$\angle APC=\angle ACD$ ($\because$ $\angle CAP$와 $\angle CAD$는 같은 각)

따라서, $\overline{AC}$는 $\triangle DCP$의 외접원의 접선이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AP}$, $5^2=3(3+\overline{DP})$

$3\overline{DP}=16$ $\therefore$ $\overline{DP}=\mathbf{\frac{16}{3}}$**(cm)**

52 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=4\times9$ $\therefore$ $\overline{PT}=6$

$\triangle BPD$와 $\triangle TPC$에서 $\angle P$는 공통,

$\angle BDP=\angle TCP=90^\circ$이므로

$\triangle BPD\backsim\triangle TPC$ (AA 닮음)

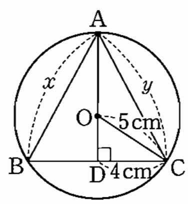
$\overline{BP}:\overline{TP}=\overline{BD}:\overline{TC}$

$9:6=\overline{BD}:3$ $\therefore$ $\overline{BD}=\mathbf{\frac{9}{2}}$

53 지름이 10cm인 원을 O, 원 O에 내접하는 삼각형을 $\triangle ABC$라 하자.

$\triangle ABC$의 넓이가 최대가 되려면 밑변이 8cm로 고정되어 있으므로 높이가 최대가 되어야 한다.

따라서, 오른쪽의 그림과 같이 $\overline{AD}$는 원의 중심을 지나면서 $\triangle ABC$의 높이가 된다.



$\therefore$ $\overline{BD}=\overline{DC}=4$ cm

직각삼각형 ODC에서

$\overline{OC}=5$ cm, $\overline{OD}=3$ cm

$\therefore$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times8\times8=\mathbf{32(cm^2)}$

$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

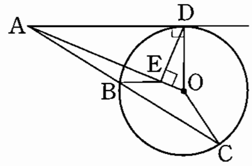
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times xr+\frac{1}{2}\times yr+\frac{1}{2}\times8r$

$=\frac{1}{2}\times(x+y+8)r$

그런데 $x^2=8^2+4^2$이고 $x=y$이므로 $x=y=4\sqrt{5}$ cm

$\frac{8+8\sqrt{5}}{2}\times r=32$에서 $r=\mathbf{2(\sqrt{5}-1)(cm)}$

54 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면



$\overline{AD}\perp\overline{OD}$, $\overline{DE}\perp\overline{AO}$

$\therefore$ $\overline{AD}^2=\overline{AE}\cdot\overline{AO}$

($\because$ $\triangle ADO\backsim\triangle AED$)

또한, $\overline{AD}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$이므로

$\overline{AE}\cdot\overline{AO}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

즉, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}$이고 $\angle EAB=\angle CAO$이므로

$\triangle EAB\backsim\triangle CAO$ (SAS 닮음)

$\therefore$ $\angle AEB=\angle ACO$

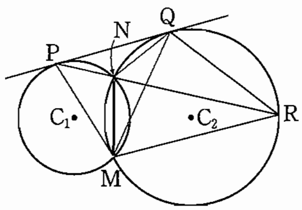
특목고 구술·면접 대비 문제

P. 176~177

1 풀이 참조 **2** 풀이 참조 **3** 풀이 참조

4 풀이 참조

1 접선과 할선이 이루는 각에 의하여



C_1의 $\triangle PMN$에서

$\angle PMN=\angle QPN$

C_2의 $\triangle QNM$에서

$\angle NMQ=\angle PQN$

$\therefore$ $\angle PMQ=\angle PMN+\angle NMQ$

$=\angle QPN+\angle PQN$ ······㉠

그런데 $\triangle PNQ$에서 삼각형의 두 내각의 크기의 합은 그와 이웃하지 않은 외각의 크기의 합과 같으므로

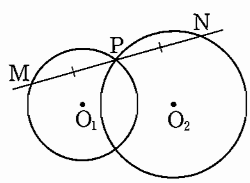
$\angle QPN+\angle PQN=\angle QNR$ ······㉡

$\angle QNR=\angle QMR$ (원주각) ······㉢

㉠~㉢에서 $\angle PMQ=\angle QMR$

따라서, $\overline{MQ}$는 $\angle PMR$를 이등분한다.

2 먼저 원하는 결과를 오른쪽 그림과 같이 그려 놓고 보면 점 M은 점 N을 점 P에 대하여 대칭이동시켜 놓은 것이다.

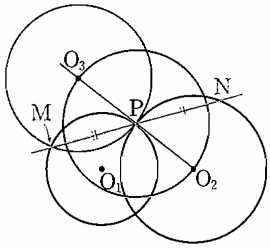


따라서, 점 M은 원 O_1과 원 O_2를 점 P를 중심으로 180° 회전이동해 놓은 원 O_3의 교점이 된다.

작도 과정

① 점 P에서 원 O_2에 접하고, 원 O_2와 합동인 원을 작도한다.

㉠ 직선 PO_2를 그은 후 점 P를 중심으로 반지름이 $\overline{PO_2}$인 원을 그리고, 직선 PO_2와의 교점을 O_3이라 한다.



㉡ 점 O_3을 중심으로 반지름이 $\overline{PO_2}$인 원을 그린다.

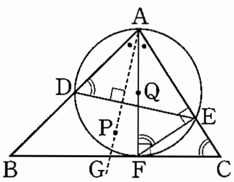
② 원 O_3과 원 O_1의 교점을 M이라 하고, 직선 MP를 그은 후 그 직선이 원 O_2와 만나는 점을 N이라 하면 $\overline{MP}=\overline{NP}$

3 $\angle AEF=90^\circ$이므로

$\angle ADE=\angle AFE$ (원주각)

$=90^\circ-\angle EAF$

$=\angle ACF$



$\angle A$는 공통

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$ (AA 닮음)

또한,

$\angle DAG=90^\circ-\angle ADE=90^\circ-\angle AFE=\angle EAF$

선분 AB의 수직이등분선이 $\overleftrightarrow{AG}$와 만나는 점을 P라 하면 $\angle PAB=\angle PBA=\angle QAE=\angle QEA$

$\triangle ABP \backsim \triangle AEQ$ (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AP}:\overline{AQ}$이고, $\overline{AQ}$가 $\triangle ADE$의 외접원의 반지름이므로 $\overline{AP}$는 $\triangle ABC$의 외접원의 중심이다.

참고

$\triangle QAE \backsim \triangle PAB$, $\triangle AED \backsim \triangle ABC$

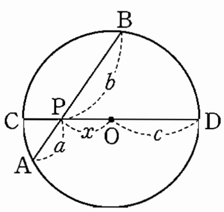
$\triangle QAE$에서 $\overline{AQ}$가 $\triangle AED$의 외접원의 반지름이고 점 Q가 $\triangle AED$의 외접원의 중심이다.

같은 방법으로 $\triangle PAB$에서 $\overline{AP}$가 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름이고 점 P가 $\triangle ABC$의 외접원의 중심이다.

4 오른쪽 그림의 원은 중심이 O이고 반지름의 길이가 c인 원이다.

$\overline{AP}=a$, $\overline{BP}=b\,(a>b)$가 되도록 $\overline{AB}$를 잡으면

$2c>a+b$이므로 $\overline{AB}$는 원의 중심 O를 지나지 않는다.



$\overline{OP}=x\,(x>0)$라 하면

$ab=(c-x)(c+x)=c^2-x^2$이므로

$c^2>ab$, $x=\sqrt{c^2-ab}$

또한, $\triangle OPB$에서 $b<c+x=c+\sqrt{c^2-ab}$

$\triangle OPA$에서 $c<a+x=a+\sqrt{c^2-ab}$이므로

$a>c-\sqrt{c^2-ab}$

$\therefore c^2>ab$, $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$

시·도 경시 대비 문제

P. 178~183

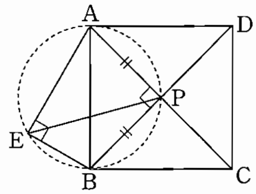
1 풀이 참조	**2** 풀이 참조	**3** 5
4 풀이 참조	**5** 풀이 참조	**6** 풀이 참조
7 풀이 참조	**8** 풀이 참조	**9** 풀이 참조
10 풀이 참조	**11** $\sqrt{5}-1$	**12** 풀이 참조
13 풀이 참조	**14** $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 4	**15** $\frac{21}{5}$
16 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$	**17** 풀이 참조	**18** 풀이 참조

1 □AEBP에서

$\angle AEB=90^\circ$,

$\angle APB=90^\circ$, 즉

$\angle AEB+\angle APB=180^\circ$로 두 대각의 크기의 합이 180°이므로 네 점 A, E, B, P는 한 원 위에 있다.



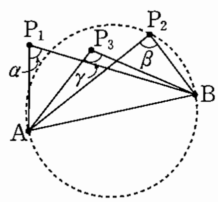
그런데 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 그 원주각도 서로 같다.

$\therefore \angle AEP=\angle BEP$

따라서, $\overline{EP}$는 $\angle AEB$의 이등분선이다.

2 5개의 점 A, B, P_1, P_2, P_3 중에서 두 점 A, B를 나머지 세 점이 직선 AB의 같은 쪽에 위치하도록 선택하자.

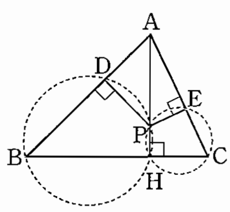
문제의 조건에서 어떤 네 점도 한 원 위에 있지 않으므로 세 각 $\angle AP_1B=\alpha$, $\angle AP_2B=\beta$, $\angle AP_3B=\gamma$의 크기는 모두 다르다. 즉, 원주각의 크기가 모두 다르다.



$\alpha<\beta<\gamma$라 하면 세 점 A, B, P_2를 지나는 원을 작도할 때 P_1은 원의 외부에, P_3은 원의 내부에 존재하게 된다.

3 $\angle ADP=\angle BHP$ (내대각)이므로 □BHPD는 한 원에 내접하는 사각형이다.

$\therefore \overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AP}\cdot\overline{AH}$ ……㉠



또한, $\angle AEP=\angle CHP$ (내대각)이므로 □CEPH는 한 원에 내접하는 사각형이다.

$\therefore \overline{AE}\cdot\overline{AC}=\overline{AP}\cdot\overline{AH}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AD}\cdot\overline{AB}=\overline{AE}\cdot\overline{AC}$이므로 $\overline{AE}=x$라 하면

$4\times10=x(x+3)$, $x^2+3x-40=0$

$(x+8)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x>0$)

4 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라고 하면 원의 내접사각형 ABCP에서 톨레미의 정리에 의하여

$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}$

$\overline{PA}\cdot a+\overline{PC}\cdot a=\overline{PB}\cdot\sqrt{2}a$

즉, $\dfrac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}=\sqrt{2}$ ……㉠

같은 방법으로 원의 내접사각형 ABPD에서

$\overline{PB}\cdot\overline{AD}+\overline{PD}\cdot\overline{AB}=\overline{PA}\cdot\overline{BD}$

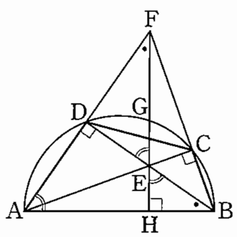
$\overline{PB}\cdot a+\overline{PD}\cdot a=\overline{PA}\cdot\sqrt{2}a$

즉, $\dfrac{\overline{PB}+\overline{PD}}{\overline{PA}}=\sqrt{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PB}+\overline{PD}}{\overline{PA}}$

$\therefore (\overline{PB}+\overline{PD}):(\overline{PA}+\overline{PC})=\overline{PA}:\overline{PB}$

5 $\triangle$FAB에서 $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ADB=90^\circ$이므로 점 E는 $\triangle$FAB의 수심이다.



$\therefore \angle FHB=90^\circ$

$\angle BEH=\angle FED$(맞꼭지각)

이므로 $\angle HBE=\angle DFE$

$\therefore \angle BEH=\angle FAH$

따라서, $\triangle HEB \backsim \triangle HAF$ (AA 닮음)

$\overline{HE}:\overline{HA}=\overline{HB}:\overline{HF}$

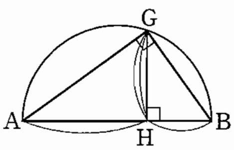
$\overline{HE}\cdot\overline{HF}=\overline{HA}\cdot\overline{HB}=\overline{HG}^2$

$\therefore \dfrac{\overline{HE}}{\overline{HG}}=\dfrac{\overline{HG}}{\overline{HF}}=\dfrac{1}{2}$ ($\because \overline{GH}=2\overline{HE}$)

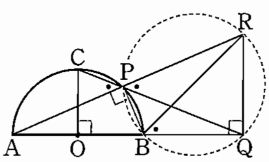
참고

$\triangle$GAB에서

$\overline{GH}^2=\overline{HA}\cdot\overline{HB}$



6 오른쪽 그림에서



$\angle APB=90^\circ$이므로

$\angle RPB=90^\circ$

또한, $\angle BQR=90^\circ$이므로 □RPBQ는 대각의 크기의 합이 180°이다.

따라서, □RPBQ는 한 원 위에 있다.

$\therefore \angle RBQ=\angle RPQ$ (원주각)

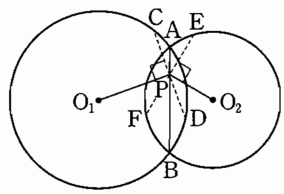
$=\angle CPA$ (맞꼭지각)

$=\dfrac{1}{2}\angle COA\left(\text{중심각의 }\dfrac{1}{2}\right)=45^\circ$

따라서, $\triangle$RBQ는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{BQ}=\overline{RQ}$

7 오른쪽 그림의 원 O_1에서



$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$

원 O_2에서

$\overline{PE}\cdot\overline{PF}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$

$\therefore \overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$ ……㉠

또한, $\triangle O_1DC$는 이등변삼각형이고, $\overline{PO_1}\perp\overline{CD}$이므로

$\overline{CP}=\overline{DP}$ ……㉡

마찬가지로 $\overline{EP}=\overline{FP}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 □CFDE의 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분하므로 □CFDE는 직사각형이다.

참고

$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$의 조건으로 □CFDE에서 두 대각선의 길이가 같은 이유

$\overline{PC}=\overline{PD}$, $\overline{PE}=\overline{PF}$이므로

$\overline{PC}^2=\overline{PE}^2$ $\quad\therefore \overline{PC}=\overline{PE}$

따라서, $\overline{PC}=\overline{PF}=\overline{PD}=\overline{PE}$이므로 $\overline{CD}=\overline{EF}$

8 원 C_1에서 $\overline{XP}\cdot\overline{XA}=\overline{XY}\cdot\overline{XQ}$ ……㉠

원 C_2에서 $\overline{XP}\cdot\overline{XB}=\overline{XZ}\cdot\overline{XQ}$ ……㉡

그런데 $\overline{AB}$의 중점이 X이므로 $\overline{XA}=\overline{XB}$

㉠, ㉡에서 $\overline{XY}\cdot\overline{XQ}=\overline{XZ}\cdot\overline{XQ}$ $\quad\therefore \overline{XY}=\overline{XZ}$

9 $\triangle$PAC에서

$\angle NPQ=\angle PAC+\angle PCA$ ……㉠

그런데 $\angle PAC=\angle CNB$ (접선과 현이 이루는 각)이고

$\angle PCA=\angle NCQ$ (주어진 조건)

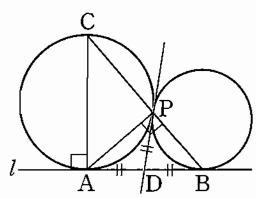
$\triangle$QCN에서

$\angle NQP=\angle CNB+\angle NCQ$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\angle NPQ=\angle NQP$이므로 $\triangle$NPQ는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{PN}=\overline{QN}$

10 오른쪽 그림에서 $\overleftrightarrow{PD}$는 두 원의 공통접선이다. 이 때, $\overline{DA}=\overline{DP}=\overline{DB}$이므로 점 D는 지름이 $\overline{AB}$인 반원 APB의 중심이다.

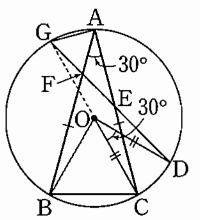


$\therefore \angle APB=\dfrac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$

$\angle APC=90^\circ$이므로 $\overline{AC}$는 원의 중심을 지난다.
따라서, $\overline{AC}$는 직선 l에 수직이다.

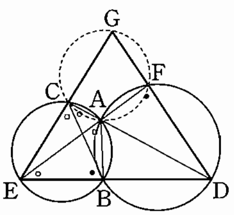
11 직각삼각형 $O_1O_2O_3$에서 $\overline{O_1O_2}=1$, $\overline{O_1O_3}=2$에서
$\overline{O_2O_3}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{O_3P}=\sqrt{5}-1$
$\triangle O_1QO_3$에서 $\overline{O_1Q}=\overline{O_1O_3}$이므로
$\angle O_1QO_3=\angle O_1O_3Q$
$\triangle O_3QS$에서 $\overline{O_3Q}=\overline{O_3S}$이므로
$\angle O_3QS=\angle O_3SQ$
따라서, $\triangle O_1QO_3$과 $\triangle O_3QS$에서
$\angle Q$는 공통, $\angle O_1O_3Q=\angle O_3SQ$
$\therefore \triangle O_1QO_3 \backsim \triangle O_3QS$ (AA 닮음)
$\overline{O_1Q}:\overline{O_3Q}=\overline{QO_3}:\overline{QS}$에서
$2:(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5}-1):\overline{QS}$
$\therefore \overline{QS}=3-\sqrt{5}$
$\therefore \overline{O_1S}=\overline{O_1Q}-\overline{QS}=2-(3-\sqrt{5})=\mathbf{\sqrt{5}-1}$

12 오른쪽 그림에서



$\angle BOC=2\angle A=60^\circ$이므로
$\triangle BOC$는 정삼각형이다.
$\angle ACO=\angle ACB-\angle OCB$
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)-60^\circ$
$=15^\circ$
$\angle AGF=\angle ACD$ (원주각)
$=\angle OCD-\angle ACO$
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)-15^\circ=60^\circ$
$\overline{DG}=\overline{AC}$이므로
$\angle GOD=\angle AOC$ (중심각)
$=180^\circ-2\times15^\circ=150^\circ$
따라서, 세 점 G, O, C는 한 직선 위에 있다.
즉, $\overline{GC}$는 원 O의 지름이므로
$\angle GAC=90^\circ$ $\quad\therefore \angle GAF=90^\circ-30^\circ=60^\circ$
따라서, $\triangle AGF$는 정삼각형이다.

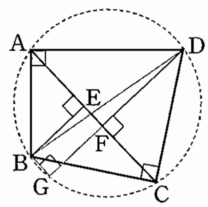
13 오른쪽 그림에서



$\angle ECA$
$=\angle ECB+\angle ACB$
$=\angle EAB+\angle AEB$ (원주각)
$=180^\circ-\angle ABE$
$=180^\circ-\angle AFD$ (내대각)
$\therefore \angle ECA+\angle AFD=180^\circ$
따라서, $\angle GCA+\angle GFA=180^\circ$이므로 네 점 G, C, A, F는 한 원 위에 있다.

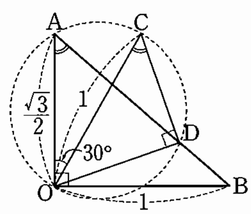
14 □GCAF가 원의 내접사각형이므로
$\overline{DA}\cdot\overline{DC}=\overline{DF}\cdot\overline{DG}$
$6\cdot9=3\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3}+\overline{FG})$ $\quad\therefore \overline{FG}=\mathbf{3\sqrt{3}}$
또한, $\triangle DFA$와 $\triangle DCG$에서
$\angle DFA=\angle DCG$, $\angle D$는 공통
$\therefore \triangle DFA \backsim \triangle DCG$ (AA 닮음)
$\overline{DF}:\overline{DC}=\overline{FA}:\overline{CG}$
$3\sqrt{3}:9=2:\overline{CG}$ $\quad\therefore \overline{CG}=\mathbf{2\sqrt{3}}$
또한, $\triangle EAC$와 $\triangle EGF$에서
$\angle EAC=\angle EGF$, $\angle E$는 공통
$\therefore \triangle EAC \backsim \triangle EGF$ (AA 닮음)
$\overline{AE}:\overline{GE}=\overline{AC}:\overline{GF}$
$\overline{AE}:(2\sqrt{3}+\overline{CE})=3:3\sqrt{3}$ ······㉠
□GCAF는 원의 내접사각형이므로
$\overline{EA}\cdot\overline{EF}=\overline{EC}\cdot\overline{EG}$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AE}=x$, $\overline{CE}=y$라 하면
$\begin{cases} x:(2\sqrt{3}+y)=3:3\sqrt{3} & \cdots\cdots ㉢ \\ x\cdot(x+2)=y\cdot(y+2\sqrt{3}) & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢에서 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ ······㉤
㉤을 ㉣에 대입하면
$2x^2-8x=0$, $2x(x-4)=0$ $\quad\therefore x=\mathbf{4}$ ($\because x>0$)

15 오른쪽 그림에서 □ABCD는 대각의 크기의 합이 180°이므로 원에 내접하고, 현 BD에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 $\overline{BD}$는 외접원의 지름이다.



$\overline{DF}$의 연장선이 원과 만나는 점을 G라 하면 $\angle DGB=90^\circ$이므로 □BGFE는 직사각형이다.
$\therefore \overline{BE}=\overline{GF}$
$\overline{AF}\cdot\overline{CF}=\overline{GF}\cdot\overline{DF}$이므로
$7\cdot3=\overline{GF}\cdot5$
$\therefore \overline{GF}=\overline{BE}=\mathbf{\frac{21}{5}}$

16 $\angle OAD=\angle OCD$이므로 네 점 A, O, D, C는 한 원 위에 있다.

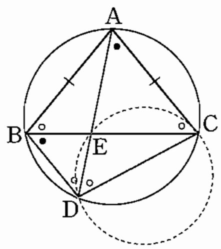


또한,
$\overline{OA}:\overline{OC}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}:1=\sqrt{3}:2$
이고 $\angle AOC=30^\circ$이므로
$\triangle AOC$는 직각삼각형이다.
$\therefore \angle OAC=90^\circ$

□AODC가 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle ODC=90^\circ$
$\triangle AOB$와 $\triangle CDO$에서
$\angle AOB=\angle CDO=90^\circ$, $\angle OAB=\angle DCO$이므로
$\triangle AOB \backsim \triangle CDO$ (AA 닮음)
$\overline{AB}:\overline{CO}=\overline{BO}:\overline{OD}$이므로 $\overline{OD}=x$라 하면
$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2}:1=1:x$
$\frac{\sqrt{7}}{2}x=1 \qquad \therefore x=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

17 점 E와 점 C를 이으면 $\angle ECD=90^\circ$이므로
$\triangle ECD$에서
$\angle EDC=90^\circ-\angle DEC=90^\circ-\angle DBC$ (원주각)
$=90^\circ-\angle TBC$
$=\angle TCB$ ($\because$ $\triangle TBC$에서 $\angle T=90^\circ$)
$=\angle ACB$
$=\angle ADB$ (원주각)
$\angle EDC=\angle ADB$이므로
$\angle BDC=\angle ADE$ ($\because$ $\angle BDE$는 공통)
따라서, 한 원에서 원주각의 크기가 같은 두 현의 길이는 같으므로 $\overline{BC}=\overline{AE}$이다.

18 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이고, 같은 길이의 변 또는 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로
$\triangle ACE \backsim \triangle ADC$
$\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$
$\therefore \overline{AE}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}^2$ (일정)

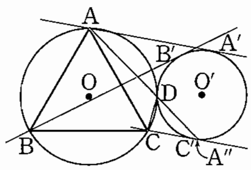


P. 184~185

대비 문제

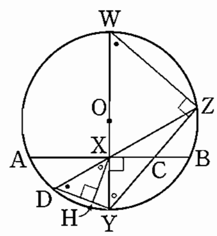
1 풀이 참조 **2** 풀이 참조 **3** $\frac{t}{1-t}$
4 풀이 참조

1 두 원 O, O′의 접점을 D라 하면 □ABCD에서 톨레미의 정리에 의하여
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$
$=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$ ……㉠



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면 ㉠은
$a\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot a=a\cdot\overline{BD}$
$\therefore \overline{CD}+\overline{AD}=\overline{BD}$ ……㉡
$\overline{AD}$의 연장선이 원 O′와 만나는 점을 A″라 하면
$\triangle OAD$와 $\triangle O'A''D$는 모두 이등변삼각형이고
$\angle ADO=\angle A''DO'$ (맞꼭지각)이므로
$\triangle OAD \backsim \triangle O'A''D$ (AA 닮음)
두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 r, r'라 하면
$\overline{AD}:\overline{A''D}=\overline{DO}:\overline{DO'}=r:r'$
$r\cdot\overline{A''D}=r'\cdot\overline{AD} \qquad \therefore \overline{A''D}=\frac{r'}{r}\overline{AD}$
또한, 접선과 할선의 관계에서
$\overline{AA'}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AA''}=\overline{AD}\,(\overline{AD}+\overline{A''D})$
$=\overline{AD}\left(\overline{AD}+\frac{r'}{r}\overline{AD}\right)=\overline{AD}^2\left(1+\frac{r'}{r}\right)$
$1+\frac{r'}{r}$는 일정한 값이므로 $1+\frac{r'}{r}=k$라 하면
$\overline{AA'}^2=k\,\overline{AD}^2 \qquad \therefore \overline{AD}=\frac{\overline{AA'}}{\sqrt{k}}$ ……㉢
같은 방법으로 $\overline{BB'}^2=k\overline{BD}^2$, $\overline{CC'}^2=k\overline{CD}^2$이므로
$\overline{BD}=\frac{\overline{BB'}}{\sqrt{k}}$, $\overline{CD}=\frac{\overline{CC'}}{\sqrt{k}}$ ……㉣
㉢, ㉣을 ㉡에 대입하면
$\frac{\overline{CC'}}{\sqrt{k}}+\frac{\overline{AA'}}{\sqrt{k}}=\frac{\overline{BB'}}{\sqrt{k}}$
$\therefore \overline{AA'}+\overline{CC'}=\overline{BB'}$

2 점 D와 점 Y를 잇고 점 X에서 $\overline{DY}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{YO}$의 연장선이 원과 만나는 점을 W라 하면
$\angle XDH=\angle ZDY$
$=\angle ZWY$ (원주각)
$=90^\circ-\angle ZYW$
$=90^\circ-\angle CYX$
$=90^\circ-\angle DXH$
따라서, $\angle DXH=\angle CYX$이고
$\angle XHD=\angle YXC=90^\circ$이므로
$\triangle XDH \backsim \triangle YCX$ (AA 닮음)
$\therefore \frac{\overline{XH}}{\overline{DX}}=\frac{\overline{YX}}{\overline{CY}}$
그런데 $\overline{XH}\le\overline{YX}$이므로
$\overline{XH}=\frac{\overline{YX}}{\overline{CY}}\cdot\overline{DX}\le\overline{YX}$
$\therefore \overline{DX}\le\overline{CY}$



3 △CEG와 △BMD에서

(i) $\angle ECG = \angle DCA$

$= \angle DBA$ (접선과 현이 이루는 각)

$= \angle DBM$

(ii) $\angle CEG = \angle CEA + \angle AEG$

$= \angle MED + \angle MEF$ (맞꼭지각)

$= \angle MED + \angle MDE$

(접선과 현이 이루는 각)

$= \angle DMB$ (△EMD에서의 외각)

(i), (ii)에서 △CEG∽△BMD (AA 닮음) ……㉠

또한, △CEF와 △AMD에서

(iii) $\angle CEF = \angle GED$ (맞꼭지각)

$= \angle EMD$ (접선과 현이 이루는 각)

$= \angle AMD$

(iv) $\angle ECF = \angle DCB = \angle DAB$ (원주각)

$= \angle MAD$

(iii), (iv)에서 △CEF∽△AMD (AA 닮음) ……㉡

㉠에서 $\frac{\overline{EG}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BM}}$이므로 $\overline{EG} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{MD}}{\overline{BM}}$

㉡에서 $\frac{\overline{EF}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AM}}$이므로 $\overline{EF} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{MD}}{\overline{AM}}$

$\therefore \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{1-t}}$

참고

$t = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$에서 $\overline{AB} = 1$이면 $\overline{AM} = t$, $\overline{BM} = 1-t$

$\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{t}{1-t}$

4 $\angle GEB = \angle BAF$ (□CEBA에서 내대각)

$= \angle BFD$ ($\overset{\frown}{BD}$의 원주각)

따라서, □GEBF에서 $\angle GEB = \angle BFD$ (내대각)이므로 네 점 G, E, B, F는 한 원 위에 있다.

$\angle GDB = \angle BAE$ (□FDBA에서 내대각)

$= \angle BCE$ ($\overset{\frown}{BE}$의 원주각)

따라서, □GDBC에서 $\angle GDB = \angle BCE$ (내대각)이므로 네 점 G, D, B, C는 한 원 위에 있다.

삼각비

특목고 대비 문제

P. 190~205

1 $\frac{181}{65}$ **2** $\frac{9}{25}$ **3** ① **4** $\frac{8}{5}$

5 $\frac{a+1}{a^2+1}\sqrt{a^2+1}+a$ **6** $\frac{3}{4}+\sqrt{7}$

7 $\sqrt{3}$ **8** 137 **9** $2\sqrt{19}$ **10** $3\sqrt{2}$ **11** $2-\sqrt{3}$

12 $\sqrt{2-2\cos x}$ **13** $\cos x < \sin x < \tan x$

14 $3\sqrt{3}$ **15** $\frac{3}{4}$ **16** ③ **17** $1+\sqrt{2}$ **18** 92

19 0 **20** $\left(\frac{34}{3}\pi+8\sqrt{3}\right)$cm **21** $\cos\theta$

22 $4+\sqrt{2}$ **23** $\angle C=90°$인 직각삼각형

24 $\frac{3}{13}\sqrt{13}$ **25** $3-2\sqrt{2}$ **26** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

27 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **28** 114m **29** $6+6\sqrt{3}$

30 $3(\sqrt{3}+1)$cm **31** 5 **32** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **33** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

34 $3\sqrt{6}$ **35** $2\sqrt{3}+6\sqrt{2}$ **36** ③

37 풀이 참조 **38** $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$ **39** $3-\sqrt{3}$

40 $27\sqrt{3}$ **41** ② **42** $(12+4\sqrt{3})$cm **43** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

44 $\frac{7}{5}$ **45** 30° **46** $2\sqrt{6}$ **47** 13cm **48** 0.36

1 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC} = \sqrt{12^2+5^2} = 13$(cm)

$\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos B = \cos 90° = 0$, $\tan C = \frac{12}{5}$

$\therefore \sin A + \cos B + \tan C = \frac{5}{13} + \frac{12}{5} = \boldsymbol{\frac{181}{65}}$

2 $\overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 5$이므로

$\overline{AB} = 4a$, $\overline{AC} = 5a$($a>0$인 상수)라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC} = \sqrt{(5a)^2-(4a)^2} = 3a$

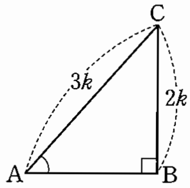
$\sin A = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$,

$\cos A = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}$,

$\tan A = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin A \times \cos A \times \tan A = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{9}{25}}$

3 $\sin A = \frac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC} = 3k$, $\overline{BC} = 2k(k>0$인 상수)라 하면



$\overline{AB} = \sqrt{(3k)^2 - (2k)^2} = \sqrt{5}k$

$\cos A = \frac{\sqrt{5}k}{3k} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\tan C = \frac{\sqrt{5}k}{2k} = \frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\cos^2 A + \tan^2 C = \frac{5}{9} + \frac{5}{4} = \mathbf{\frac{65}{36}}$

4 $\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\triangle ABC$와 $\triangle EBD$에서

$\angle B$는 공통, $\angle BAC = \angle BED = 90°$이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle EBD$ (AA 닮음)

따라서, $\angle x = \angle C$이므로 $\sin x = \sin C = \frac{4}{5}$

$\triangle ABC$와 $\triangle GFC$에서

$\angle C$는 공통, $\angle BAC = \angle FGC = 90°$이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle GFC$ (AA 닮음)

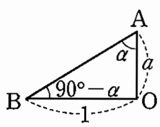
따라서, $\angle y = \angle B$이므로 $\cos y = \cos B = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin x + \cos y = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{8}{5}}$

5 $y = ax + b$에서 기울기 a는

$a = \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO} = 1$이라 할 때, $\overline{AO} = a$라 할 수 있다.



$\overline{AB} = \sqrt{a^2+1}$이므로 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$,

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\tan (90° - \alpha) = a$

$\therefore$ (주어진 식)$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + a$

$= \mathbf{\frac{a+1}{a^2+1}\sqrt{a^2+1} + a}$

6 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$이므로

$\overline{AB} : 6 = 4 : 3 \quad \therefore \overline{AB} = 8$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\therefore \overline{DC} = 2\sqrt{7} \times \frac{3}{7} = \frac{6\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \sin B + \tan D = \frac{6}{8} + \frac{6}{\frac{6\sqrt{7}}{7}} = \mathbf{\frac{3}{4} + \sqrt{7}}$

7 $0° \leqq x \leqq 30°$에서 $10° \leqq 2x + 10° \leqq 70°$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$이므로 $2x + 10° = 30°$

$\therefore 4x = 40°$

$0° \leqq y \leqq 20°$에서 $10° \leqq 3y + 10° \leqq 70°$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $3y + 10° = 30°$

$\therefore 3y = 20°$

$\therefore \tan (4x + 3y) = \tan 60° = \mathbf{\sqrt{3}}$

8 $y = \sin x$의 그래프와 $y = \cos x$의 그래프가 $a°$에서 만나므로 $a° = 45° \quad \therefore a = 45$

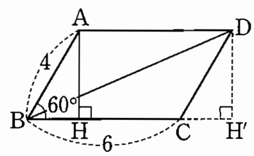
그리고 $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos b° = 0$이므로 $b° = 90° \quad \therefore b = 90$

$\sin b° = \sin 90° = d$이므로 $d = 1$

$\therefore a + b + 2c^2 + d = 45 + 90 + 1 + 1 = \mathbf{137}$

9 오른쪽 그림과 같이 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H, 꼭지점 D에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H′라 하면



$\triangle ABH$에서 $\angle B = 60°$이므로

$\overline{BH} = 4 \cos 60° = 2 = \overline{CH'}$,

$\overline{AH} = 4 \sin 60° = 2\sqrt{3} = \overline{DH'}$

$\triangle DBH'$에서

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BH'}^2 + \overline{DH'}^2} = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = \mathbf{2\sqrt{19}}$

10 직각삼각형 ABC에서

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \tan 60° = \sqrt{3}$이므로 $\overline{BC} = 3$

또한, 직각삼각형 BCD에서 $\sin 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} \times \overline{BD} = 2\,\overline{BC}$

$\therefore \overline{BD} = \sqrt{2} \times \overline{BC} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

11 $\angle CAB = 60°$이므로 $\angle ACB = 30°$

$\triangle ACD$는 이등변삼각형이므로

$\angle CDA=\frac{1}{2}\times 30^\circ=15^\circ$

$\triangle ABC$에서

$\overline{AB}=\overline{AC}\cos 60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$,

$\overline{BC}=\overline{AC}\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$이므로

$\tan 15^\circ=\tan D=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

12 $\overline{AB}=\sin x$, $\overline{OB}=\cos x$이므로 $\overline{BD}=1-\cos x$

$\triangle ABD$에서 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$이므로

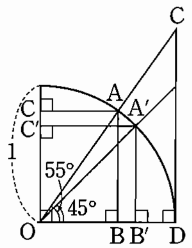
$\overline{AD}^2=\sin^2 x+(1-\cos x)^2$

$=\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x$

$=2-2\cos x$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{\mathbf{2-2\cos x}}$ ($\because \overline{AD}>0$)

13 오른쪽 그림과 같은 사분원에서



$\sin 55^\circ=\overline{AB}>\overline{A'B'}$

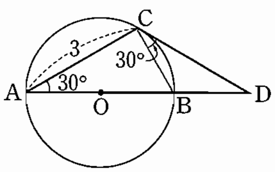
$=\sin 45^\circ=\cos 45^\circ$

$=\overline{A'C'}>\overline{AC}=\cos 55^\circ$

$\tan 55^\circ=\overline{CD}>\overline{AB}=\sin 55^\circ$

$\therefore \mathbf{\cos x<\sin x<\tan x}$

14 점 C와 점 B를 이으면



$\triangle ABC$에서 $\angle A=30^\circ$,

$\angle ACB=90^\circ$이므로

$\tan 30^\circ=\frac{\overline{BC}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{3}$

$\cos 30^\circ=\frac{3}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}$

또한, $\overline{CD}$는 원 O의 접선이므로 접선과 현이 이루는 각에 의하여 $\angle BCD=\angle A=30^\circ$

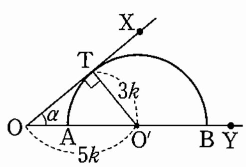
$\angle ABC=60^\circ$이므로 $\angle D=30^\circ$

즉, $\triangle BDC$는 $\overline{BC}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{BC}$

$=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=\mathbf{3\sqrt{3}}$

15 오른쪽 그림과 같이 점 T와 점 O′를 이으면 $\triangle TOO'$에서 $\angle T=90^\circ$이고



$\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로

$\overline{OO'}=5k$, $\overline{TO'}=3k$ $(k\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$\overline{O'A}=\overline{O'B}=\overline{O'T}=3k$이므로 $\overline{OA}=2k$

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{6k}{8k}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

다른 풀이

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{2\overline{AO'}}{\overline{OO'}+\overline{O'B}}=\frac{2\cdot\frac{\overline{AO'}}{\overline{OO'}}}{1+\frac{\overline{O'B}}{\overline{OO'}}}=\frac{2\cdot\frac{\overline{TO'}}{\overline{OO'}}}{1+\frac{\overline{TO'}}{\overline{OO'}}}$$

$$=\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{2\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\frac{6}{8}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

16 $\angle C=90^\circ$이므로 $\angle A+\angle B=90^\circ$

① $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin^2 B+\cos^2 B=1$

② $\cos A=\sin(90^\circ-A)$

③ $\tan(90^\circ-A)=\frac{1}{\tan A}=\tan B$

④ $\sin(A+B)\neq\sin A+\sin B$

⑤ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

참고

$\angle A+\angle B=90^\circ$일 때

① $\sin A=\cos B$

② $\tan A=\frac{1}{\tan B}$

③ $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\cos B}{\sin B}$

④ $\sin A\sin B=\cos A\cos B$

17 $\overline{DC}=a$ $(a\neq 0)$라 하면 $\angle C'=90^\circ$이므로 $\triangle C'ED$는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{C'E}=a$, $\overline{ED}=\sqrt{2}a$

$\angle ADB=\angle CBD$ (엇각)$=\angle C'BD$ (접은 각)

따라서, $\triangle EBD$는 $\overline{EB}=\overline{ED}$인 이등변삼각형이다.

$\angle EBD+\angle EDB=45^\circ$이므로 $\angle EDB=22.5^\circ$

직각삼각형 C′BD에서

$\angle C'DB=\angle C'DE+\angle EDB=45^\circ+22.5^\circ=67.5^\circ$

$\therefore \tan 67.5^\circ=\tan(\angle C'DB)$

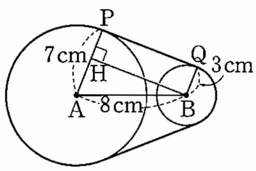
$=\frac{\overline{BC'}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{EC'}+\overline{BE}}{a}$

$=\frac{a+\sqrt{2}a}{a}=\mathbf{1+\sqrt{2}}$

18 $\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\cdots+\sin 45^\circ-\cos 46^\circ-\cos 47^\circ$
$-\cdots-\cos 90^\circ$
$=(\sin 1^\circ-\cos 89^\circ)+(\sin 2^\circ-\cos 88^\circ)+\cdots$
$+(\sin 44^\circ-\cos 46^\circ)+\sin 45^\circ-\cos 90^\circ$
$=(\sin 1^\circ-\sin 1^\circ)+(\sin 2^\circ-\sin 2^\circ)+\cdots$
$+(\sin 44^\circ-\sin 44^\circ)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a$
$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ$
$=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+\cdots$
$+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 90^\circ$
$=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots$
$+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2$
$=1\times 44+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{91}{2}=b$
$\therefore 2a^2+2b=1+91=\mathbf{92}$

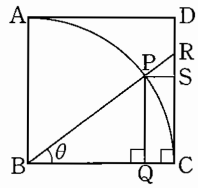
19 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면
$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$
$=2$
$\therefore \sin x\cos x=\dfrac{1}{2}$
$(\sin x-\cos x)^2=(\sin x+\cos x)^2-4\sin x\cos x$
$=2-4\cdot\dfrac{1}{2}=0$
$\therefore \sin x-\cos x=\mathbf{0}$

20 점 B에서 $\overline{PA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=4$ cm이므로
$\overline{PQ}=\overline{HB}$
$=\sqrt{8^2-4^2}$
$=4\sqrt{3}$ (cm)



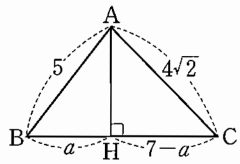
$\triangle$ABH에서 $\overline{AB}:\overline{HB}:\overline{HA}=2:\sqrt{3}:1$이므로
$\angle HAB=\angle PAB=60^\circ$, $\angle ABQ=120^\circ$
따라서, 필요한 벨트의 길이는
$2\times\pi\times 7\times\dfrac{240^\circ}{360^\circ}+2\times\pi\times 3\times\dfrac{120^\circ}{360^\circ}+2\times\overline{PQ}$
$=\dfrac{28}{3}\pi+\dfrac{6}{3}\pi+2\times 4\sqrt{3}$
$=\mathbf{\dfrac{34}{3}\pi+8\sqrt{3}\ (cm)}$

21 오른쪽 그림에서 점 P를 지나고 변 BC에 평행한 직선이 변 CD와 만나는 점을 S라 하면 $\triangle$ PSR는 $\angle PSR=90^\circ$, $\angle RPS=\theta$인 직각삼각형이다.



$\therefore \dfrac{\overline{QC}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PR}}=\mathbf{\cos\theta}$

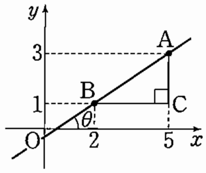
22 오른쪽 그림과 같이 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=a$, $\overline{HC}=7-a$라 하면



$\overline{AH}=\sqrt{5^2-a^2}$
$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(7-a)^2}$
$25-a^2=32-49+14a-a^2$
$14a=42$이므로 $a=3$ $\quad\therefore \overline{AH}=4$
$\therefore \sin B=\dfrac{4}{5},\ \cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore 5\sin B+2\sin C=\mathbf{4+\sqrt{2}}$

23 $2\sin^2 A+5\cos A-4=0$에서
$\sin^2 A=1-\cos^2 A$이므로
$2(1-\cos^2 A)+5\cos A-4=0$
$2\cos^2 A-5\cos A+2=0$
$(2\cos A-1)(\cos A-2)=0$
$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos A=2$
그런데 $0\leqq\cos A\leqq 1$이므로
$\cos A=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \angle A=60^\circ$
$2\cos^2 B-5\sin B+1=0$에서
$\cos^2 B=1-\sin^2 B$이므로
$2(1-\sin^2 B)-5\sin B+1=0$
$2\sin^2 B+5\sin B-3=0$
$(\sin B+3)(2\sin B-1)=0$
$\therefore \sin B=-3$ 또는 $\sin B=\dfrac{1}{2}$
그런데 $0\leqq\sin B\leqq 1$이므로
$\sin B=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \angle B=30^\circ$
$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$이므로 $\angle C=90^\circ$
따라서, $\triangle$ABC는 **$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형**이다.

24 오른쪽 그림에서 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하고, 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC를 만들면



$\overline{AB}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$이고

$\angle ABC=\theta$이므로 $\angle CAB=90^\circ-\theta$

$\therefore \sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\mathbf{\dfrac{3}{13}\sqrt{13}}$

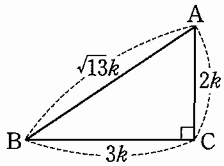
다른 풀이

(기울기)$=\tan\theta=\dfrac{3-1}{5-2}=\dfrac{2}{3}$

이므로 오른쪽 그림에서

$\overline{BC}=3k$, $\overline{AC}=2k\ (k\neq0)$

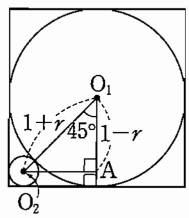
라 하면



$\overline{AB}=\sqrt{(3k)^2+(2k)^2}=\sqrt{13}k$

$\therefore \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta=\dfrac{3k}{\sqrt{13}k}=\mathbf{\dfrac{3}{13}\sqrt{13}}$

25 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{O_1O_2}=1+r$,



$\overline{O_1A}=1-r$, $\overline{O_2A}=1-r$

$\therefore \cos 45^\circ=\dfrac{1-r}{1+r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}(1+r)=2(1-r)$,

$(2+\sqrt{2})r=2-\sqrt{2}$

$\therefore r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\mathbf{3-2\sqrt{2}}$

다른 풀이

직각삼각형 O_1O_2A에서

$\overline{O_1O_2}^2=\overline{O_1A}^2+\overline{O_2A}^2$

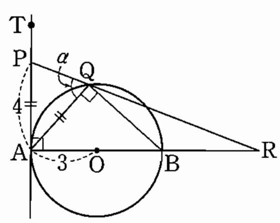
$(1+r)^2=(1-r)^2+(1-r)^2$

$1+2r+r^2=2-4r+2r^2$

$r^2-6r+1=0$

$\therefore r=\mathbf{3-2\sqrt{2}}\ (\because 0<r<1)$

26 점 A는 접점이므로



$\angle PAR=90^\circ$

$\therefore \angle P+\angle R=90^\circ$

점 Q와 점 B를 이으면

$\overline{AB}$는 지름이므로

$\angle AQB=90^\circ$

$\therefore \angle AQP+\angle BQR=90^\circ$

$\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 $\angle APQ=\angle AQP=\alpha$

따라서, $\triangle APR$에서 $90^\circ+\alpha+\angle PRA=180^\circ$

$\angle PRA=\angle BRQ=90^\circ-\alpha$ ……㉠

또한, $\overline{PR}$에서 $\angle PQA+\angle AQB+\angle BQR=180^\circ$이므로

$\alpha+90^\circ+\angle BQR=180^\circ$

$\therefore \angle BQR=90^\circ-\alpha$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\angle BQR=\angle BRQ$

따라서, $\triangle BRQ$는 $\overline{BR}=\overline{BQ}$인 이등변삼각형이다.

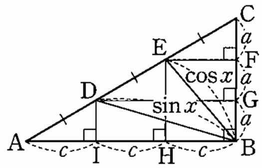
직각삼각형 ABQ에서 $\overline{AQ}=4$, $\overline{AB}=6$이므로

$\overline{BQ}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}=\overline{BR}$

$\therefore \tan\alpha=\tan P=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AP}}$

$=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\mathbf{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

27 $\triangle DIB$에서



$a^2+(2c)^2=\sin^2 x$ ……㉠

$\triangle EHB$에서

$(2a)^2+c^2=\cos^2 x$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$5(a^2+c^2)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\therefore a^2+c^2=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3c)^2}=3\sqrt{a^2+c^2}$

$=3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$

다른 풀이

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{ED}=b$라 하자.

파포스의 정리를 이용하면

$\triangle ABE$에서

$c^2+\cos^2 x=2(b^2+\sin^2 x)$ ……㉠

$\triangle DBC$에서

$\sin^2 x+a^2=2(b^2+\cos^2 x)$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$a^2+c^2+\sin^2 x+\cos^2 x=2(2b^2+\sin^2 x+\cos^2 x)$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로 $a^2+c^2+1=2(2b^2+1)$

$a^2+c^2=4b^2+1$ ……㉢

한편, $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

$a^2+c^2=(3b)^2$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $4b^2+1=(3b)^2$

$5b^2=1\quad \therefore b=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\ (\because b>0)$

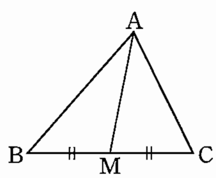
$\therefore \overline{AC}=3b=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$

참고

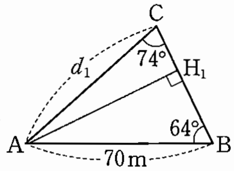
파포스(Pappos)의 정리

$\triangle ABC$에서 변 BC의 중점을 M이라고 하면

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



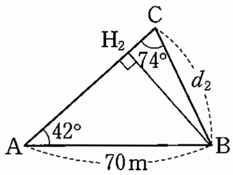
28 오른쪽 그림과 같이 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면



$\overline{AH_1}=d_1 \sin 74°=70 \sin 64°$

$\therefore d_1=\dfrac{70 \sin 64°}{\sin 74°}$ ……㉠

오른쪽 그림과 같이 꼭지점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H_2라 하면



$\overline{BH_2}=d_2 \sin 74°=70 \sin 42°$

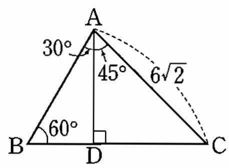
$\therefore d_2=\dfrac{70 \sin 42°}{\sin 74°}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$d_1+d_2=\dfrac{70\,(\sin 64°+\sin 42°)}{\sin 74°}$

$=\dfrac{70\times(0.9+0.67)}{0.96}\fallingdotseq \mathbf{114(m)}$

29 오른쪽 그림에서 꼭지점 A에서 대변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\angle BAD=30°$, $\angle CAD=45°$이므로 $\triangle ADC$는 한 각의 크기가 45°인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{AD}=\overline{CD}=6\sqrt{2}\cos 45°=6$

또한, $\triangle ABD$에서

$\tan 60°=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{BD}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\sin 60°=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=a=6+2\sqrt{3}$, $\overline{AB}=c=4\sqrt{3}$

$\therefore a+c=\mathbf{6+6\sqrt{3}}$

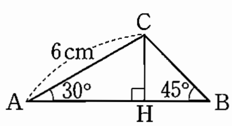
30 점 C와 점 O를 이으면

$\angle AOC=2\angle ABC=90°$ ($\because$ 원주각)

$\angle COB=150°-90°=60°$

$\therefore \angle CAB=\dfrac{1}{2}\angle COB=30°$ ($\because$ 원주각)

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭지점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



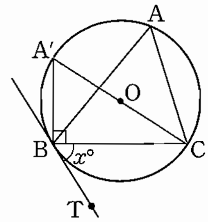
$\overline{AH}=6\cos 30°$

$=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

$\overline{CH}=\overline{BH}=6\sin 30°=6\times\dfrac{1}{2}=3(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}=\mathbf{3(\sqrt{3}+1)(cm)}$

31 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 A′라 하면 $\angle A'BC=90°$ ($\because$ 지름의 원주각)이고, 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여



$\angle A'=\angle CBT=x°$

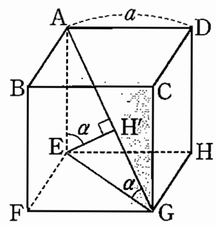
직각삼각형 A′BC에서

$\tan x°=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{A'B}}=\dfrac{8}{\overline{A'B}}=\dfrac{4}{3}$ $\therefore \overline{A'B}=6$

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{A'C}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서, 원 O의 반지름의 길이는 **5**이다.

32 오른쪽 그림에서



$\overline{EG}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

$\overline{AG}=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$

직각삼각형 AEG에서

$\angle EGA+\angle EAG$

$=\angle EGA+\angle EAH'$

$=90°$

직각삼각형 AEH′에서

$\angle a+\angle EAH'=90°$

$\therefore \angle EGA=\angle a$

따라서, $\triangle AEG$에서

$\sin a=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AG}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos a=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{AG}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin a\times\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

다른풀이

직각삼각형 AEG의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EG}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AG}\times\overline{EH'}$

$a\times\sqrt{2}a=\sqrt{3}a\times\overline{EH'}$

$\therefore \overline{EH'}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

$\triangle AEH'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AH'}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{EH'}^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

따라서, $\triangle AEH'$에서

$\sin a=\dfrac{\overline{AH'}}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos a=\dfrac{\overline{EH'}}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin a\times\cos a=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

33 $\overline{EC}=b$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=a+b$

$\overline{CD}=(a+b)\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)$

$\tan 75^\circ=\frac{a+b}{b}=2+\sqrt{3}$

$\therefore a+b=b(2+\sqrt{3})$ ······㉠

$\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=(a+b)-\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)$

$=(a+b)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=b(2+\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ($\because$ ㉠)

$=b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ······㉡

한편, ㉠에서 $a+b=2b+\sqrt{3}b$, $(\sqrt{3}+1)b=a$

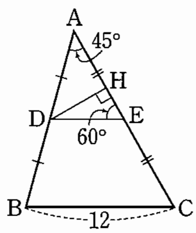
$\therefore b=\frac{a}{\sqrt{3}+1}$ ······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\overline{AD}=\frac{a}{\sqrt{3}+1}\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{a}{\sqrt{3}+1}\times\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{a}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}a}$

34 점 D, E가 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로 삼각형의 중점연결 정리에 의하여



$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=6$

(또는 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)이고 두 삼각형의 닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{DE}=6$)

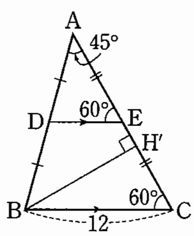
점 D에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=6\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{\overline{DH}}{\sin 45^\circ}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

다른풀이

점 D, E가 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로 삼각형의 중점연결 정리에 의하여



$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$

$\therefore \angle C=\angle AED=60^\circ$

점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$\overline{BH'}=12\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$

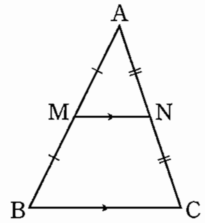
$\angle ABH'=45^\circ$이므로

$\overline{AB}=\frac{\overline{BH'}}{\cos 45^\circ}=6\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

참고

삼각형의 중점연결 정리



$\triangle ABC$에서

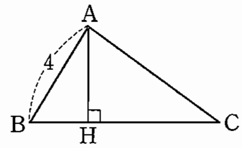
① 점 M, N이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이면

$\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

② $\overline{AM}=\overline{BM}$이고 $\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$이면

$\overline{AN}=\overline{CN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

35 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\sin B=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{\overline{AH}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{AH}=2\sqrt{3}$

$\overline{BH}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

$\sin C=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{2\sqrt{3}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \overline{AC}=6$

$\overline{HC}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

따라서, $\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times(2+2\sqrt{6})\times 2\sqrt{3}$

$=\boldsymbol{2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$

36 $\triangle BCD$에서 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$이므로 $\triangle BCD$는 $\angle D=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{BD}=20\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$ (cm)

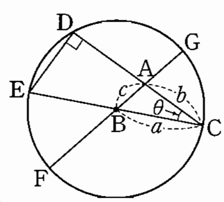
$\therefore \square ABCD$

$=\triangle BCD+\triangle ABD$

$=\frac{1}{2}\times 20\times 10\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 16\times 10\sqrt{3}\times\sin 30^\circ$

$=50\sqrt{3}+40\sqrt{3}=\boldsymbol{90\sqrt{3}}$ **(cm²)**

37 $\overline{EC}$가 원 B의 지름이므로



$\angle D=90^\circ$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{DC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{DC}}{2a}$

$\overline{DC}=2a\cos\theta$이므로

$\overline{DA}=\overline{DC}-\overline{AC}=2a\cos\theta-b$

원에서의 비례 관계에서

$\overline{AD}\cdot\overline{AC}=\overline{AF}\cdot\overline{AG}$이고, 원 B의 반지름의 길이가 a이므로 $(2a\cos\theta-b)\cdot b=(a+c)(a-c)$

$2ab\cos\theta-b^2=a^2-c^2$ $\quad\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

38 △ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 대변을 각각 a, b, c라 할 때, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$이므로

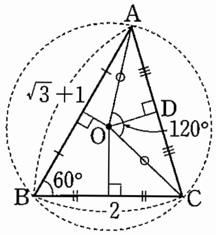
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2\cdot\cos 60^\circ$

$=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2=6$

$\therefore b=\overline{AC}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$ ($\because b>0$)

삼각형의 외접원의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림에서



∠AOC=2∠B=120°이고

△AOD≡△COD

(SAS 합동)이므로

∠AOD=∠COD=60°

따라서, 외접원의 반지름의 길이 $\overline{AO}$는

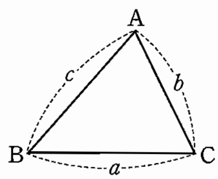
$$\overline{AO}=\frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

참고

꼭지점 A에서 변 BC에 수선을 내리는 방법으로 $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있으나 제이코사인법칙을 이용하면 훨씬 편리하게 구할 수 있다.

제이코사인법칙

오른쪽 그림의 △ABC에서

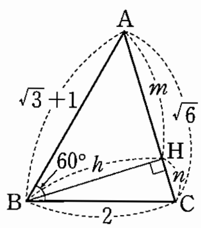


$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

39 오른쪽 그림의 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=h$, $\overline{AH}=m$, $\overline{CH}=n$이라 하면



$\tan A=\frac{h}{m}$이므로

$\frac{1}{\tan A}=\frac{m}{h}$

$\tan C=\frac{h}{n}$이므로

$\frac{1}{\tan C}=\frac{n}{h}$

△ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}$

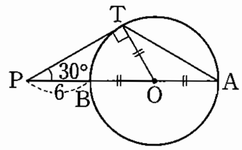
$(\sqrt{3}+1)\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\times h$

$\therefore h=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{m}{h}+\frac{n}{h}=\frac{m+n}{h}$

$=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=\boldsymbol{3-\sqrt{3}}$

40 오른쪽 그림과 같이 점 T와 점 O를 이으면 ∠PTO=90°이므로 △TPO는 직각삼각형이다.



$\overline{PT}=x$, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{TO}=r=x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\overline{PO}=\frac{x}{\cos 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

그런데 $\overline{PO}=\overline{PB}+\overline{BO}$이므로

$\frac{2\sqrt{3}}{3}x=6+r=6+\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x=6 \qquad \therefore x=6\sqrt{3},\ r=6$

따라서, △TPA의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{TP}\times\overline{PA}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 18\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{27\sqrt{3}}$

41 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

$=S$

$\therefore ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B=2S$

$\triangle ADF=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}c\cdot\frac{3}{5}b\cdot\sin A=\frac{1}{10}bc\sin A$

$=\frac{1}{10}\cdot 2S=\frac{1}{5}S$

$\triangle BED=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}c\cdot\frac{1}{4}a\cdot\sin B=\frac{1}{12}ca\sin B$

$=\frac{1}{12}\cdot 2S=\frac{1}{6}S$

$\triangle CFE=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{2}{5}b\cdot\sin C=\frac{3}{20}ab\sin C$

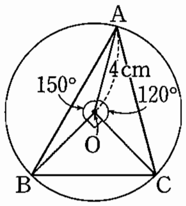
$=\frac{3}{20}\cdot 2S=\frac{3}{10}S$

$\therefore \triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle ADF+\triangle BED+\triangle CFE)$

$=S-\left(\frac{1}{5}S+\frac{1}{6}S+\frac{3}{10}S\right)$

$=S-\frac{2}{3}S=\boldsymbol{\frac{1}{3}S}$

42 $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$이므로



$\angle A = 3k$, $\angle B = 4k$, $\angle C = 5k$

(k는 자연수)라 하면

$3k + 4k + 5k = 180°$, $12k = 180°$

$\therefore k = 15°$

$\therefore \angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 75°$

한 원에서 같은 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC = 2\angle A = 90°$

$\angle AOC = 2\angle B = 120°$

$\angle AOB = 2\angle C = 150°$

$\triangle BOC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 90° = 8$

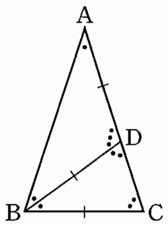
$\triangle AOC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin (180° - 120°) = 4\sqrt{3}$

$\triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin (180° - 150°) = 4$

$\therefore \triangle ABC = \triangle BOC + \triangle AOC + \triangle AOB$

$= 8 + 4\sqrt{3} + 4 = \mathbf{12 + 4\sqrt{3}\ (cm^2)}$

43 $\angle ABC = 2\angle x$라 하면



$\angle ACB = 2\angle x$, $\angle BDC = 2\angle x$

$\triangle BCD$에서

$\angle BDA = \angle DBC + \angle DCB$

$= \angle x + 2\angle x = 3\angle x$

$\angle BDC + \angle BDA = 180°$이므로

$2\angle x + 3\angle x = 180°$, $5\angle x = 180°$

$\therefore \angle x = 36°$

따라서, $\triangle ABD$에서 $\angle A + \angle ABD + \angle BDA = 180°$이므로

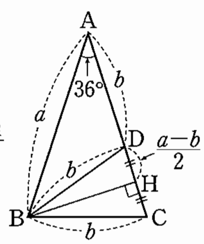
$\angle A + \angle x + 3\angle x = \angle A + 4 \times 36° = 180°$

$\therefore \angle A = 180° - 144° = 36°$

따라서, $\triangle ABD$는 $\overline{AD} = \overline{BD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BC}$

한편, 꼭지점 B에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고



$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$라 하자.

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$,

$a : b = b : (a - b)$

$b^2 = a(a - b)$, $b^2 + ab - a^2 = 0$

$\therefore b = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2}$ ($\because b > 0$)

$\overline{DH} = \frac{\overline{AC} - \overline{AD}}{2} = \frac{a - b}{2}$

$= \frac{a - \frac{-a + \sqrt{5}a}{2}}{2} = \frac{3a - \sqrt{5}a}{4}$

$\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH}$

$= b + \frac{3a - \sqrt{5}a}{4}$

$= \frac{-a + \sqrt{5}a}{2} + \frac{3a - \sqrt{5}a}{4}$

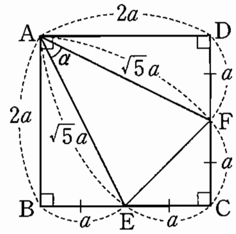
$= \frac{a + \sqrt{5}a}{4}$

따라서, 직각삼각형 ABH에서

$\cos A = \cos 36° = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$

$= \frac{\frac{a + \sqrt{5}a}{4}}{a} = \mathbf{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}}$

44 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $2a$라 하면



$\overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{FD} = a$

두 직각삼각형 ABE와 AFD에서

$\overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$

$= \sqrt{5}a$

$\triangle AEF$의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}a \cdot \sqrt{5}a \cdot \sin\alpha = \frac{5}{2}a^2 \sin\alpha$ ······㉠

또한,

$S = \square ABCD - (2\triangle ABE + \triangle ECF)$

$= (2a)^2 - \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\right)$

$= 4a^2 - \frac{5}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{5}{2}a^2 \sin\alpha = \frac{3}{2}a^2$

$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{5}$

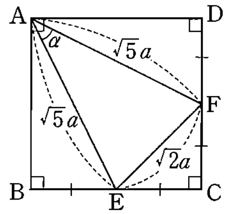
$0° < x < 90°$이므로 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$에서

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$

$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{7}{5}}$

다른풀이



삼각형의 세 변의 길이를 구할 수 있으므로 △AEF에서 제이코사인법칙을 이용한다.

$\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{AF}^2$
$\quad -2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cdot\cos\alpha$

$(\sqrt{2}a)^2=(\sqrt{5}a)^2+(\sqrt{5}a)^2$
$\quad -2\cdot\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}a\cdot\cos\alpha$

$2a^2=10a^2-10a^2\cos\alpha$

$10a^2\cos\alpha=8a^2 \qquad \therefore \cos\alpha=\dfrac{8a^2}{10a^2}=\dfrac{4}{5}$

$0°<\alpha<90°$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\mathbf{\dfrac{7}{5}}$

45 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\sqrt{3},\ \alpha\beta=2$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$

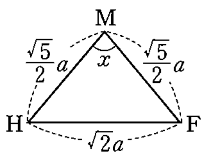
$\therefore \alpha-\beta=2\ (\because \alpha>\beta)$

$\tan(90°-\theta)=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, $0°<\theta<90°$이므로 $\theta=\mathbf{30°}$

46 정육면체의 한 변의 길이를 a라 하면 피타고라스의 정리에 의하여



$\overline{HF}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

$\overline{MH}=\overline{MF}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2}$
$\quad =\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$

삼각형의 세 변의 길이를 구할 수 있으므로 △MHF에서 제이코사인법칙을 이용한다.

$\overline{HF}^2=\overline{MH}^2+\overline{MF}^2-2\cdot\overline{MH}\cdot\overline{MF}\cdot\cos x$

$(\sqrt{2}a)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\cos x$

$2a^2=\dfrac{5}{2}a^2-\dfrac{5}{2}a^2\cos x$

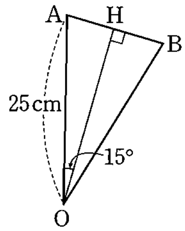
$\dfrac{5}{2}a^2\cos x=\dfrac{1}{2}a^2 \qquad \therefore \cos x=\dfrac{1}{5}$

$0°<x<90°$이므로 $\cos^2x+\sin^2x=1$에서

$\sin x=\sqrt{1-\cos^2x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}$
$\quad =\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$

$\therefore \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\frac{2}{5}\sqrt{6}}{\frac{1}{5}}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

47 원 모양의 시계의 중심을 O라 하고, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle AOB=\dfrac{360°}{12}=30°$

이등변삼각형 AOB에서

$\angle AOH=15°$

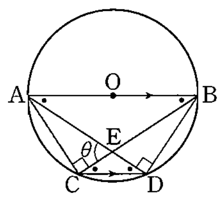
△AOH에서

$\sin 15°=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AH}}{25}$

$\therefore \overline{AH}=25\sin 15°\fallingdotseq 25\times 0.26=6.5(\text{cm})$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\mathbf{13(cm)}$

48 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}$,



$\angle ACB=\angle BDA=90°$

$\therefore$ △ACB≡△BDA
(RHS 합동)

$\therefore \angle ABC=\angle BAD$

또한, $\angle BAD=\angle BCD$ (원주각)

$\angle BAD=\angle ADC$ (엇각)

$\therefore$ △ABE∽△CDE (AA 닮음)

$\triangle ABE=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{EB}\cdot\sin(180°-\theta)$
$\quad =\dfrac{1}{2}\overline{AE}^2\sin(180°-\theta) \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\triangle CDE=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{ED}\cdot\sin(180°-\theta)$
$\quad =\dfrac{1}{2}\overline{CE}^2\sin(180°-\theta) \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$\dfrac{\triangle CDE}{\triangle ABE}=\dfrac{\overline{CE}^2}{\overline{AE}^2}=\left(\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\right)^2=\cos^2\theta$
$\quad \fallingdotseq (0.6)^2=\mathbf{0.36}$

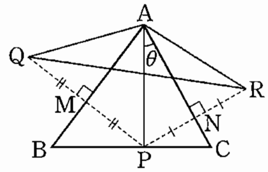
P. 206~207

특목고 구술·면접 대비 문제

1 꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발

2 $\dfrac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}c$ **3** 3 **4** 풀이 참조

1 오른쪽 그림과 같이 $0° < \angle A < 90°$인 $\triangle ABC$의 변 BC 위에 임의의 한 점 P를 잡고 변 AB, AC에 대한 점 P의 대칭점 Q, R를 잡는다.



또한, 변 AB와 PQ의 교점을 M, 변 AC와 PR의 교점을 N이라 하고, $\angle PAC=\theta$라 하면

$\triangle ANP$와 $\triangle ANR$에서

$\overline{AN}$은 공통, $\overline{NP}=\overline{NR}$ ($\because$ 대칭점),

$\angle ANP=\angle ANR=90°$이므로

$\triangle ANP \equiv \triangle ANR$ (SAS 합동)

$\therefore \angle NAR=\angle CAR=\angle NAP=\theta$ $\cdots\cdots$ ㉠

마찬가지로 $\triangle AMQ \equiv \triangle AMP$ (SAS 합동)

$\therefore \angle BAP=\angle BAQ=\angle BAC-\theta$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\angle QAR=2(\angle BAC-\theta)+2\theta=2\angle BAC$

또한, $\triangle ANP \equiv \triangle ANR$에서 $\overline{AP}=\overline{AR}$이고,

$\triangle AMQ \equiv \triangle AMP$에서 $\overline{AQ}=\overline{AP}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{AR}=\overline{AP}$

$\triangle AQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{AR}\cdot\sin(2\angle BAC)$

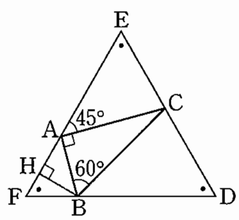
(또는 $180°-2\angle BAC$)

$=\frac{1}{2}\overline{AP}^2\sin(2\angle BAC)$

여기에서 $2\angle A$ 또는 $180°-2\angle A$는 일정하므로 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 $\triangle AQR$의 넓이가 최소가 된다.

따라서, $\overline{AP}$의 길이가 최소가 되는 점 P는 **꼭지점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발**이다.

2 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle FAB=180°-(45°+90°)$

$=45°$

$\angle FBH=180°-(90°+60°)$

$=30°$ ($\because \angle F=60°$)

$\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{AB}\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}c$

$\overline{FH}=\overline{BH}\tan 30°=\frac{\sqrt{6}}{6}c$

$\therefore \overline{AF}=\overline{AH}+\overline{FH}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c$

또한, $\triangle AFB$와 $\triangle AEC$에서

$\angle FAB=\angle EAC=45°$, $\angle F=\angle E=60°$이므로

$\triangle AFB \backsim \triangle AEC$ (AA 닮음)

따라서, $\overline{AF} : \overline{AE}=\overline{AB} : \overline{AC}$이고

$\overline{AC}=\overline{AB}\tan 60°=\sqrt{3}c$이므로

$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c : \overline{AE}=c : \sqrt{3}c$

$\overline{AE}\cdot c=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c\cdot\sqrt{3}c$

$\therefore \overline{AE}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c$

$\therefore \overline{EF}=\overline{AF}+\overline{AE}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c$

$=\frac{4\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{6}c=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}c}$

3 $\square PDBE$에서

$\angle PDB=\angle PEB=90°$, $\angle B=60°$이므로

$\angle DPE=120°$

같은 방법으로

$\angle EPF=120°$, $\angle DPF=120°$

$\triangle PDE=\frac{1}{2}xy\sin(180°-120°)=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$

$\triangle PEF=\frac{1}{2}yz\sin(180°-120°)=\frac{\sqrt{3}}{4}yz$

$\triangle PFD=\frac{1}{2}zx\sin(180°-120°)=\frac{\sqrt{3}}{4}zx$

$\therefore \triangle DEF=\triangle PDE+\triangle PEF+\triangle PFD$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sqrt{3}=\mathbf{3}$

4 $\angle ADB=\theta$, $\angle ADC=180°-\theta$라 하고 제이코사인법칙을 이용한다.

$\triangle ABD$에서 $c^2=m^2+d^2-2md\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{m^2+d^2-c^2}{2md}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle ADC$에서 $b^2=n^2+d^2-2nd\cos(180°-\theta)$

$\therefore \cos(180°-\theta)=\frac{n^2+d^2-b^2}{2nd}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$\cos\theta+\cos(180°-\theta)$

$=\frac{m^2+d^2-c^2}{2md}+\frac{n^2+d^2-b^2}{2nd}=0$

위의 식의 양변에 $2mnd$를 곱하면

$n(m^2+d^2-c^2)+m(n^2+d^2-b^2)=0$

$d^2(m+n)+mn(m+n)-c^2n-b^2m=0$

$(m+n)(d^2+mn)=b^2m+c^2n$

$m+n=a$이므로 $a(d^2+mn)=b^2m+c^2n$

참고

위의 결과 $a(d^2+mn)=b^2m+c^2n$을 스튜와트(Stewart)의 정리라 한다. 또한, $m=n$이면

$2m(d^2+m^2)=b^2m+c^2m$

$2(d^2+m^2)=b^2+c^2$

즉, 파포스(Pappus)의 정리가 된다.

시·도 경시 대비 문제

P. 208~211

1 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **2** $\dfrac{\sqrt{3}}{11}$ **3** $16(3+\sqrt{3})$

4 $2\sqrt{2}$ **5** $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ **6** 풀이 참조 **7** $\sqrt{3}\pi a^3$

8 108% **9** 20 **10** $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ **11** 풀이 참조

12 $\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}+\dfrac{1}{\tan w}$

1 $x^2+\cos\theta\cdot x+\sin^2\theta=3\cos\theta\cdot x-\sin\theta\cos\theta$

$x^2-2\cos\theta\cdot x+\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=0$ ……㉠

직선이 이차함수의 그래프에 접하므로 ㉠은 중근을 가져야 한다.

$\therefore \dfrac{D}{4}=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta=0$

위의 식의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$이므로

$\tan^2\theta+\tan\theta-1=0$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

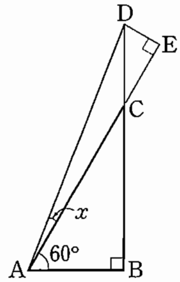
그런데 $0°<\theta<90°$에서 $\tan\theta>0$이므로

$\tan\theta=\mathbf{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

2 $\overline{AB}=a$라 하면

$\overline{AC}=\dfrac{\overline{AB}}{\cos 60°}=2a$

$\overline{BC}=\overline{AB}\tan 60°=\sqrt{3}a$



오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC\backsim\triangle DEC$가 되는 점 E를 잡으면

$\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{BC}:\overline{EC}=\overline{AC}:\overline{DC}$이므로

$\sqrt{3}a:\overline{EC}=2a:\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore \overline{EC}=\dfrac{3}{4}a$

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{DC}$이므로

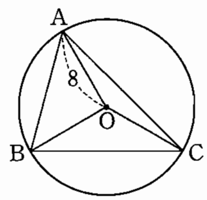
$a:\overline{DE}=2a:\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

$\therefore \tan x=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AC}+\overline{EC}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a}{2a+\dfrac{3}{4}a}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{11}}$

3 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로



$\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$

$=3:4:5$

$\therefore \angle AOB=360°\times\dfrac{3}{12}=90°$,

$\angle BOC=360°\times\dfrac{4}{12}=120°$,

$\angle COA=360°\times\dfrac{5}{12}=150°$

따라서, 구하는 삼각형의 넓이는

$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sin 90°+\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sin(180°-120°)$

$+\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sin(180°-150°)$

$=32+16\sqrt{3}+16$

$=\mathbf{16(3+\sqrt{3})}$

4 $\triangle ABM$은 $\angle B=60°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{AB}\sin 60°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{GM}=\dfrac{1}{3}\times\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 AMG에서

$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{GM}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \tan x=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GM}}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

5 $\triangle AOD$에서 $\angle AOD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$이므로

$\triangle AOD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times2\times\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AO}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \overline{AO}=3$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AO}+\overline{CO}=5$

두 대각선의 길이의 합이 11이므로

$3+2+\overline{BD}=11$ $\quad\therefore \overline{BD}=6$

$\therefore \square ABCD=\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\sin 60^\circ=\mathbf{\dfrac{15\sqrt{3}}{2}}$

6 직각삼각형 ABC에서 $a^2+b^2=c^2$

$s(s-a)(s-b)(s-c)$

$=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot\dfrac{-a+b+c}{2}\cdot\dfrac{a-b+c}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}$

$=\dfrac{(a+b)+c}{2}\cdot\dfrac{(a+b)-c}{2}\cdot\dfrac{c-(a-b)}{2}\cdot\dfrac{c+(a-b)}{2}$

$=\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\dfrac{c^2-(a-b)^2}{4}$

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4}\cdot\dfrac{c^2-a^2-b^2+2ab}{4}$

$=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{1}{2}ab$ $(\because a^2+b^2=c^2)$

$=\left(\dfrac{1}{2}ab\right)^2$

$\therefore S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}ab\right)^2}=\dfrac{1}{2}ab$ $(\because a>0,\ b>0)$

7 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=a$, $\angle CAB=60^\circ$이므로

$\overline{AC}=\dfrac{a}{\cos 60^\circ}=2a$, $\overline{BC}=a\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$

$\overline{BE}=x$, $\triangle ABC$의 회전체의 부피를 V_1,

$\square CBED$의 회전체의 부피를 V_2라 하면

$V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot\sqrt{3}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$

$V_2=\pi\cdot x^2\cdot\sqrt{3}a=\sqrt{3}\pi ax^2$

$V_1=V_2$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3=\sqrt{3}\pi ax^2$ $\quad\therefore x^2=\dfrac{1}{3}a^2$

따라서, 구하는 회전체의 부피를 V_3이라 하면

$V_3=\pi\cdot(2x)^2\cdot\sqrt{3}a-\pi\cdot x^2\cdot\sqrt{3}a$

$=\sqrt{3}\pi a(4x^2-x^2)=\sqrt{3}\pi a\cdot3x^2=\sqrt{3}\pi a\cdot a^2$

$=\mathbf{\sqrt{3}\pi a^3}$

8 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$\overline{AD}=1.2c$, $\overline{AE}=0.9b$이므로

$\triangle ADE=\dfrac{1}{2}\times1.2c\times0.9b\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}bc\sin A\times1.08$

$=\triangle ABC\times1.08$

따라서, $\triangle ADE$의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 1.08배, 즉 **108%**이다.

9 $\overline{AC}=\overline{MC}=5$이므로 $\triangle AMC$는 이등변삼각형이다.

꼭지점 C에서 변 AM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

따라서, $\triangle AMC$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\times5\times5\times\sin C$

$10=\dfrac{25}{2}\times\sin C$ $\quad\therefore \sin C=\dfrac{4}{5}$

따라서, $\triangle ABC$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times10\times\dfrac{4}{5}=\mathbf{20}$

10 $\triangle ABD$와 $\triangle CAE$에서

$\overline{AB}=\overline{CA}$, $\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$ ······㉠

또한, $\overline{BD}\,/\!/\,\overline{CE}$이므로 $\angle DBF=\angle ECF=x$라 하면

$\therefore \angle ABD=45^\circ-x$ ······㉡

$\triangle CAE$에서

$\angle CAE+90^\circ+(45^\circ+x)=180^\circ$

$\therefore \angle CAE=45^\circ-x$ ······㉢

㉡, ㉢에서 $\angle ABD=\angle CAE$ ······㉣

따라서, ㉠, ㉣에서 $\triangle ABD\equiv\triangle CAE$(RHA 합동)

이므로 $\overline{AD}=1$

$\therefore \overline{DE}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\triangle DBF\backsim\triangle ECF$ (AA 닮음)이고, 두 삼각형의 닮음비

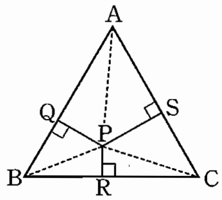
가 $\overline{BD}:\overline{CE}=2:1$이므로 $\overline{EF}=\dfrac{1}{3}\overline{DE}=\dfrac{1}{3}$

$\triangle ECF$에서

$\overline{CF}=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

$\therefore \cos x=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CF}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$

11 정삼각형의 한 변의 길이를 a 라 하고 그 넓이를 S라 하면



$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

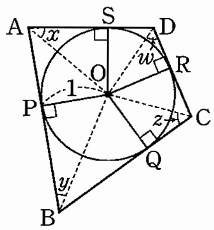
$=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

$=\frac{1}{2}\cdot a\cdot \overline{PQ}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot \overline{PR}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot \overline{PS}$

$=\frac{1}{2}a\cdot(\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{PS})$

따라서, $\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{PS}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$로 점 P의 위치에 관계 없이 항상 일정하다.

12 오른쪽 그림에서 내접원의 중심 O와 각 꼭지점을 이은 선분은 각각 각을 이등분한다.



또한, 각 변과 원의 접점을 P, Q, R, S라 하면

$\overline{AB}\perp\overline{OP}$, $\overline{BC}\perp\overline{OQ}$, $\overline{CD}\perp\overline{OR}$, $\overline{DA}\perp\overline{OS}$이다.

$\therefore$ □ABCD

$=$□OSAP$+$□OPBQ$+$□OQCR$+$□ORDS

$=2(\triangle OSA+\triangle OPB+\triangle OQC+\triangle ORD)$

$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{AS}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{PB}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{QC}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{RD}\right)$

$=\overline{AS}+\overline{BP}+\overline{CQ}+\overline{DR}$

$=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan w}$

P. 212~213

대비 문제

1 풀이 참조 **2** $4\pi+2\sqrt{3}$ **3** (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sqrt{3}$ **4** (1) $\frac{37\sqrt{13}}{13}$ (2) $\frac{18\sqrt{13}}{13}$ (3) $\frac{316\sqrt{13}}{13}$

1 $\angle AJB=\theta_1$, $\angle AIB=\theta_2$, $\angle AGB=\theta_3$, $\angle AEB=\theta_4$ 라 하고, 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 다음 그림에서

$\overline{AJ}=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$, $\overline{AG'}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$,

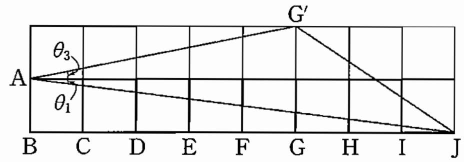
$\overline{G'J}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\triangle AJG'$에서

$\overline{AJ}:\overline{AG'}:\overline{G'J}=\sqrt{65}:\sqrt{26}:\sqrt{13}$

$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}:\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}:\sqrt{13}$

$=\sqrt{5}:\sqrt{2}:1$ ……㉠



또한, 다음 그림에서

$\overline{AI}=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$, $\overline{IE'}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$,

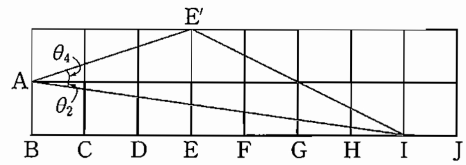
$\overline{AE'}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\triangle AIE'$에서

$\overline{AI}:\overline{IE'}:\overline{AE'}=\sqrt{50}:\sqrt{20}:\sqrt{10}$

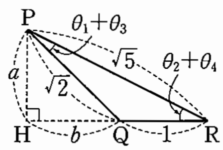
$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}:\sqrt{10}$

$=\sqrt{5}:\sqrt{2}:1$ ……㉡



㉠, ㉡에서 $\triangle AJG'\backsim\triangle IAE'$ (SSS 닮음)

따라서, $\triangle AJG'$와 $\triangle IAE'$를 오른쪽 그림과 같이 $\triangle PQR$로 나타낼 수 있다.



꼭지점 P에서 $\overline{RQ}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overline{PH}=a$, $\overline{QH}=b$라 하면

$a^2+b^2=(\sqrt{2})^2$, $a^2+(b+1)^2=(\sqrt{5})^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서, $\triangle PHQ$는 직각이등변삼각형이므로

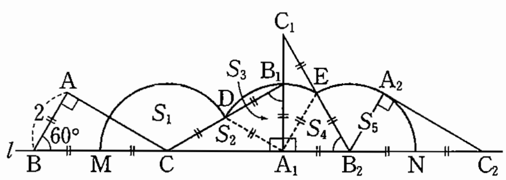
$\angle PQH=45°$

그런데 $\angle QPR=\theta_1+\theta_3$, $\angle QRP=\theta_2+\theta_4$이고

$\angle QPR+\angle QRP=\angle PQH$ ($\because$ 외각의 성질)이므로

$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=45°$

2



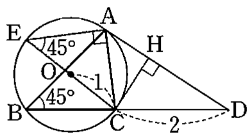
위의 그림에서 $\triangle ABC$의 점 M은 직각삼각형의 빗변의 중점이므로 외심이다.

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

그런데 $\angle B=60°$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=2$
점 M이 지나는 곡선은 위의 그림에서 색선이므로 점 M이 지나는 곡선과 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면 S는 색칠한 부분의 넓이를 나타낸다.
$\therefore S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$
S_1, S_3, S_5는 각각 점 C, 점 A_1, 점 B_2가 중심이고, 중심각의 크기가 각각 $\angle MCD=150°$, $\angle DA_1E=90°$, $\angle EB_2N=120°$이고, 반지름의 길이가 모두 2인 부채꼴이다.
또한, $S_2+S_4=\triangle ABC$이다.

$$S_1+S_3+S_5=\pi\times 2^2\times\left(\frac{150°}{360°}+\frac{90°}{360°}+\frac{120°}{360°}\right)$$
$$=4\pi$$
$$S_2+S_4=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 60°=2\sqrt{3}$$
$\therefore S=\mathbf{4\pi+2\sqrt{3}}$

3 (1) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CO}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 E라 하고 점 E와 점 A를 이으면



$\angle AEC=\angle ABC=45°$ (원주각)
$\angle A=90°$이므로 $\triangle ECA$는 직각이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{AC}=\overline{EC}\cdot\cos 45°=2\cos 45°=\sqrt{2}$
꼭지점 C에서 접선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HA}$와 $\overline{HC}$는 한 점 H에서 원 O에 그은 접선이므로 $\overline{HA}=\overline{HC}$이다.
따라서, $\triangle ACH$는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AH}=\overline{CH}=1$
직각삼각형 CDH에서
$\overline{HD}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$\therefore \cos(\angle ADC)=\dfrac{\overline{HD}}{\overline{CD}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) 접선과 할선의 관계에서 $\overline{DA}^2=\overline{DC}\cdot\overline{DB}$이므로
$(\sqrt{3}+1)^2=2(2+\overline{BC})$, $4+2\sqrt{3}=4+2\overline{BC}$
$2\overline{BC}=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\mathbf{\sqrt{3}}$

4 (1) $\triangle ABE$에서 제이코사인법칙을 이용하면
$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\cos 60°$$
$$=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=13$$
$\therefore \overline{AE}=\sqrt{13}$
또한, $\overline{EA}\cdot\overline{EC}=\overline{EB}\cdot\overline{ED}$이므로
$\sqrt{13}\cdot\overline{EC}=4\cdot 6$ $\quad\therefore \overline{EC}=\dfrac{24}{\sqrt{13}}=\dfrac{24\sqrt{13}}{13}$
$\therefore \overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}=\mathbf{\dfrac{37\sqrt{13}}{13}}$

(2) 한 원에서 호의 길이가 같으면 원주각의 크기도 같으므로
$\angle ABD=\angle ACD$, $\angle BAC=\angle BDC$
$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$ (AA 닮음)
$\overline{BA}:\overline{CD}=\overline{EB}:\overline{EC}$, $3:\overline{CD}=4:\dfrac{24\sqrt{13}}{13}$
$4\overline{CD}=\dfrac{72\sqrt{13}}{13}$ $\quad\therefore \overline{CD}=\mathbf{\dfrac{18\sqrt{13}}{13}}$

(3) □ABCD가 원의 내접사각형이므로 톨레미의 정리에 의하여
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$
$3\cdot\dfrac{18\sqrt{13}}{13}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\dfrac{37\sqrt{13}}{13}\cdot 10$
$\therefore \overline{AD}\cdot\overline{BC}=\dfrac{370\sqrt{13}}{13}-\dfrac{54\sqrt{13}}{13}=\mathbf{\dfrac{316\sqrt{13}}{13}}$

교과서 외의 경시

특목고 대비 문제

P. 218~222

1 풀이 참조	**2** 20	**3** 풀이 참조
4 풀이 참조	**5** 풀이 참조	**6** 풀이 참조
7 2	**8** 5	**9** 풀이 참조
10 a의 최대값 13, $b=14$, 15		**11** 풀이 참조
12 풀이 참조	**13** 풀이 참조	**14** 풀이 참조
15 풀이 참조	**16** 풀이 참조	

1 $(ax+by)-(ay+bx)=ax+by-ay-bx$
$=a(x-y)-b(x-y)$
$=(a-b)(x-y)$
$a<b$이므로 $a-b<0$이고, $x<y$이므로 $x-y<0$
따라서, $(a-b)(x-y)>0$이므로 $ax+by>ay+bx$

2 $m>0$, $n>0$이므로 산술, 기하평균에 의하여
$9=m+n\geq 2\sqrt{mn}$ $\quad\therefore \sqrt{mn}\leq\dfrac{9}{2}$ ……㉠
㉠의 양변을 제곱하면
$mn\leq\dfrac{81}{4}=20.25$ $\left(\text{단, 등호는 } m=n=\dfrac{9}{2}\text{일 때 성립}\right)$
$\therefore [mn]\leq[20.25]=20$
따라서, $[mn]$의 최대값은 **20**이다.

3 (1) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$
$=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1$
$=3+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$
$\geq 3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}+2\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}$
$=3+2+2+2=9$
$\therefore (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(2) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$ ……㉠
$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{b}}=2$ ……㉡
$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2$ ……㉢
따라서, ㉠, ㉡, ㉢에서
$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)\geq 2\cdot2\cdot2=8$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

4 코시-슈바르츠의 부등식에서
$(a^2+b^2+c^2)^2$
$=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\geq(ab+bc+ca)^2=1$
$\therefore a^2+b^2+c^2\geq 1$ ……㉠
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=(a+b+c)^2-2$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $(a+b+c)^2-2\geq 1$, $(a+b+c)^2\geq 3$
$\therefore a+b+c\geq\sqrt{3}$ ($\because a+b+c>0$)

다른풀이
$a+b+c>0$, $\sqrt{3}>0$이므로
$(a+b+c)^2-(\sqrt{3})^2$
$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-3$
$=a^2+b^2+c^2-1$ ($\because ab+bc+ca=1$)
$=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$
$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$
$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$
$\therefore (a+b+c)^2\geq(\sqrt{3})^2$
$a+b+c>0$이므로 $a+b+c\geq\sqrt{3}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

5 $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$이라 가정하면
$\sqrt{c+1}=2\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$ ……㉠
㉠의 양변을 제곱하면
$c+1=4c-4\sqrt{c(c-1)}+(c-1)$
$2\sqrt{c(c-1)}=2c-1$ ……㉡
㉡의 양변을 제곱하여 정리하면 $4c^2-4c=4c^2-4c+1$
$0=1$이므로 모순이 된다.
따라서, $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$와 $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$은 같지 않으므로 두 식 중 어느 한 쪽이 항상 다른 쪽보다 크다.

6 직각삼각형의 빗변의 길이가 c이므로 $a^2+b^2=c^2$
$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\geq 0$이므로 $a^2+b^2=c^2\geq 2ab$
$c^2+c^2\geq a^2+b^2+2ab$이므로 $2c^2\geq(a+b)^2$
$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\sqrt{2}c\geq a+b$

다른풀이
$a^2+b^2=c^2$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술, 기하평균에 의해서
$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$
즉, $a^2+b^2=c^2$이므로 $c^2\geq 2ab$
$c^2+c^2\geq a^2+b^2+2ab$, $2c^2\geq(a+b)^2$
$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\sqrt{2}c\geq a+b$

7 $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2$$

따라서, $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ 의 최소값은 2이다.

8 $x>5$이므로 $x-2>0,\ x-5>0$

$x-2+\dfrac{1}{x-5}=x-5+\dfrac{1}{x-5}+3$

$$\geq 2\sqrt{(x-5)\cdot\dfrac{1}{x-5}}+3=2+3=5$$

따라서, $x-2+\dfrac{1}{x-5}$ 의 최소값은 5이다.

9 $a,\ b,\ c,\ d$는 자연수이므로
$a\geq b\geq c\geq d>0$이라 가정하자.
$a^4+b^4+c^4+d^4\geq a^3b+b^3c+c^3d+d^3a$에서 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하면
$a^3(a-b)+b^3(b-c)+c^3(c-d)+d^3(d-a)\geq 0$
즉, $a^3(a-b)+b^3(b-c)+c^3(c-d)\geq d^3(a-d)$임을 보이면 된다.
$a\geq c,\ b\geq c$이므로
$a^3(a-b)+b^3(b-c)+c^3(c-d)$
$\geq c^3(a-b)+c^3(b-c)+c^3(c-d)$
$=c^3(a-b+b-c+c-d)$
$=c^3(a-d)$
그런데 $c\geq d$이므로 $c^3(a-d)\geq d^3(a-d)$
$\therefore a^4+b^4+c^4+d^4\geq a^3b+b^3c+c^3d+d^3a$

다른풀이

코시-슈바르츠의 부등식을 두 번 이용한다.
$(a^3b+b^3c+c^3d+d^3a)^2$
$\leq(a^4+b^4+c^4+d^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)$ ……㉠
$(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)^2$
$\leq(a^4+b^4+c^4+d^4)(b^4+c^4+d^4+a^4)=(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$
따라서, $a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2\leq a^4+b^4+c^4+d^4$이므로 ㉠에서
$(a^3b+b^3c+c^3d+d^3a)^2$
$\leq(a^4+b^4+c^4+d^4)(a^4+b^4+c^4+d^4)$
$\leq(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$
$\therefore a^3b+b^3c+c^3d+d^3a\leq a^4+b^4+c^4+d^4$

참고

$a,\ b,\ c,\ d$ 네 자연수를 $a\geq b\geq c\geq d>0$이라 가정해도 일반성을 잃지 않는다.
즉, $a\geq b\geq d\geq c>0,\ a\geq c\geq b\geq d>0,\ \cdots,\ d\geq a\geq b\geq c>0$ 등 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서가 바뀌어도 문제를 풀거나 어떤 명제를 증명하는 데는 아무 이상이 없다.

10 둔각삼각형이 될 조건은
$a+b>c,\ a^2+b^2<c^2$
$a<b$이므로 $2a^2<c^2=400$
$a^2<200\quad\therefore a<\sqrt{200}=14.142\cdots$
(i) $a=14$일 때, $14^2+b^2<20^2$
$b^2<204\quad\therefore b<\sqrt{204}=14.282\cdots$
이것은 $a<b$라는 조건에 모순이다.
(ii) $a=13$일 때, $13^2+b^2<20^2$
$b^2<231\quad\therefore b<\sqrt{231}=15.198\cdots$
이것은 $a<b$라는 조건에 맞으므로
$b=14$ 또는 $b=15$이다.
(i), (ii)에서 **a의 최대값은 13이고 그 때의 b의 값은 14 또는 15**이다.

11 $b+c-a=s$ ……㉠
$c+a-b=t$ ……㉡
$a+b-c=u$ ……㉢
라 하면 $a,\ b,\ c$가 삼각형의 변의 길이이므로 $s,\ t,\ u$는 양수이다.
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 정리하면
㉠+㉡+㉢에서 $a+b+c=s+t+u$ ……㉣
㉣에 $b+c=a+s$ ($\because$ ㉠)를 대입하면
$2a+s=s+t+u\quad\therefore a=\dfrac{t+u}{2}$
㉣에 $c+a=b+t$ ($\because$ ㉡)를 대입하면
$2b+t=s+t+u\quad\therefore b=\dfrac{u+s}{2}$
㉣에 $a+b=c+u$ ($\because$ ㉢)를 대입하면
$2c+u=s+t+u\quad\therefore c=\dfrac{s+t}{2}$

$$\therefore \dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}$$
$$=\dfrac{t+u}{2s}+\dfrac{u+s}{2t}+\dfrac{s+t}{2u}$$
$$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{s}+\dfrac{u}{s}+\dfrac{u}{t}+\dfrac{s}{t}+\dfrac{s}{u}+\dfrac{t}{u}\right)$$
$$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{t}{s}+\dfrac{s}{t}\right)+\left(\dfrac{u}{s}+\dfrac{s}{u}\right)+\left(\dfrac{u}{t}+\dfrac{t}{u}\right)\right\}$$
$$\geq\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{\dfrac{t}{s}\cdot\dfrac{s}{t}}+2\sqrt{\dfrac{u}{s}\cdot\dfrac{s}{u}}+2\sqrt{\dfrac{u}{t}\cdot\dfrac{t}{u}}\right)=3$$

12 (1) 좌변을 우변으로 이항하면

$$\dfrac{b+m}{a+m}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+m)-b(a+m)}{a(a+m)}$$
$$=\dfrac{am-bm}{a(a+m)}=\dfrac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$$

따라서, $a>b>0,\ m>0$일 때, $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$

(2) x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$x+y>z \quad \therefore z-x<y$ ······㉠

$y+z>x \quad \therefore x-y<z$ ······㉡

$z+x>y \quad \therefore y-z<x$ ······㉢

$$\therefore \left|\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right|$$

$$<\left|\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right| (\because ㉠, ㉡, ㉢)$$

$$<\left|\frac{z+z}{x+y+z}+\frac{x+x}{x+y+z}+\frac{y+y}{x+y+z}\right| (\because (1))$$

$$=\left|\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}\right|=2 \ (\because x+y+z>0)$$

13 $abc>0$이므로 주어진 식의 양변에 abc 를 곱하여 $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$임을 증명하면 된다.

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}$$

$$\geq\sqrt{a^4\cdot b^4}+\sqrt{b^4\cdot c^4}+\sqrt{c^4\cdot a^4}$$

$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$=a^2\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)+b^2\left(\frac{c^2+a^2}{2}\right)+c^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

$$\geq a^2\sqrt{b^2\cdot c^2}+b^2\sqrt{c^2\cdot a^2}+c^2\sqrt{a^2\cdot b^2}$$

$$=a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

$$=abc(a+b+c)$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

14 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$ ······㉠

$(x^2+y^2+z^2)^2\geq 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ ······㉡

$(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$\geq(x^2y+y^2z+z^2x)^2$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변변끼리 곱하여 정리하면

$(x^2+y^2+z^2)^4\geq(x^2y+y^2z+z^2x)^2(x+y+z)^2$

$\therefore (x^2+y^2+z^2)^2\geq(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$

(단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

참고

㉠ : $(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$이므로
$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$

㉢ : $(x^2+y^2+z^2)\{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\}$
$\geq(x\cdot xy+y\cdot yz+z\cdot zx)^2$이므로
$(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$\geq(x^2y+y^2z+z^2x)^2$

㉡ : $(x^2+y^2+z^2)^2$
$=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$(\because a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca)$
$=3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

15 $a\geq b>0$이라 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

주어진 부등식을 증명하려면 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}\geq 1$임을 보이면 된다.

$$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=a^{a-b}\cdot\frac{1}{b^{a-b}}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geq 1 \quad ······㉠$$

$\dfrac{a}{b}\geq 1$이고, $a-b\geq 0$이므로 ㉠은 성립한다.

$\therefore a^ab^b\geq a^bb^a$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

16 먼저 임의의 양의 실수 a, b에 대하여

$a^ab^b\geq(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ ······㉠

이 성립함을 보인다.

$a\geq b>0$이라 가정해도 일반성을 잃지 않으므로

㉠의 양변을 제곱하면 $a^{2a}b^{2b}\geq(ab)^{a+b}$

따라서, $\dfrac{a^{2a}b^{2b}}{(ab)^{a+b}}\geq 1$임을 보이면 ㉠이 성립하는 것을 보이는 것이다.

$$\frac{a^{2a}b^{2b}}{a^{a+b}b^{a+b}}=\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geq 1 \quad ······㉠'$$

$\dfrac{a}{b}\geq 1$이고 $a-b\geq 0$이므로 ㉠′는 성립한다.

따라서, $a\geq b\geq c>0$이라고 가정하면 다음과 같은 식을 나타낼 수 있다.

$a^ab^b\geq(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ ······㉡

$b^bc^c\geq(bc)^{\frac{b+c}{2}}$ ······㉢

$c^ca^a\geq(ca)^{\frac{c+a}{2}}$ ······㉣

㉡, ㉢, ㉣을 변변끼리 곱하면

$$(a^ab^bc^c)^2\geq a^{\frac{2a+b+c}{2}}b^{\frac{a+2b+c}{2}}c^{\frac{a+b+2c}{2}}$$

$$=(abc)^{\frac{a+b+c}{2}}a^{\frac{a}{2}}b^{\frac{b}{2}}c^{\frac{c}{2}}$$

$$=(abc)^{\frac{a+b+c}{2}}(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{2}}$$

위의 식의 양변을 $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{2}}$으로 나누면

$(a^ab^bc^c)^{\frac{3}{2}}\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{2}}$ ······㉤

㉤의 양변을 $\dfrac{2}{3}$ 제곱하면

$a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

P. 223

특목고 구술·면접 대비 문제

1 풀이 참조 **2** 풀이 참조

1 큰 정사각형의 넓이를 A, 네 직사각형의 넓이의 합을 B, 색칠한 정사각형의 넓이를 C라 하면

$A=(a+b)^2$, $B=4ab$, $C=(a-b)^2$

또한, $A-B=C$이므로

$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0$

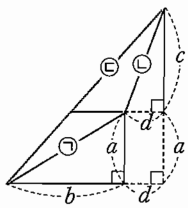
따라서, $(a+b)^2-4ab\geq 0$이므로

$(a+b)^2\geq 4ab$, $\dfrac{(a+b)^2}{4}\geq ab$

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$

$a>0$, $b>0$이므로 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

2 기울기를 생각해 보자.



오른쪽 그림에서 $\dfrac{a}{b}$는 왼쪽 아래의 직각삼각형의 기울기이므로 ㉠, $\dfrac{c}{d}$는 오른쪽 위의 직각삼각형의 기울기이므로 ㉡, $\dfrac{a+c}{b+d}$는 큰 직각삼각형의 기울기이므로 ㉢이다.

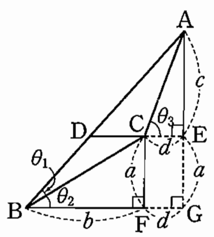
큰 직각삼각형의 기울기 ㉢은 왼쪽 아래의 직각삼각형의 기울기 ㉠과 오른쪽 위의 직각삼각형의 기울기 ㉡ 사이에 있음을 알 수 있다.

따라서, ㉠<㉢<㉡이므로

$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$이면 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이



$\angle ABC=\theta_1$, $\angle CBF=\theta_2$, $\angle ACE=\theta_3$이라 하면

$\theta_2<\theta_1+\theta_2<\theta_3$이므로

$\tan\theta_2<\tan(\theta_1+\theta_2)<\tan\theta_3$ ……㉠

$\triangle ABG$에서 $\angle ABG=\theta_1+\theta_2$이므로

$\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{a+c}{b+d}$

$\triangle CBF$에서 $\tan\theta_2=\dfrac{a}{b}$

$\triangle ACE$에서 $\tan\theta_3=\dfrac{c}{d}$

따라서, ㉠에 의하여 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

다른 풀이

a, b, c, d는 변의 길이이므로

$a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$

조건에서 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$의 양변에 bd를 곱하면

$ad<bc$ $\quad\therefore ad-bc<0$ ……㉠

(i) $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)}$

$=\dfrac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)}$

$=\dfrac{bc-ad}{b(b+d)}=-\dfrac{ad-bc}{b(b+d)}>0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$

(ii) $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{d(a+c)-c(b+d)}{d(b+d)}$

$=\dfrac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)}$

$=\dfrac{ad-bc}{d(b+d)}<0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$